

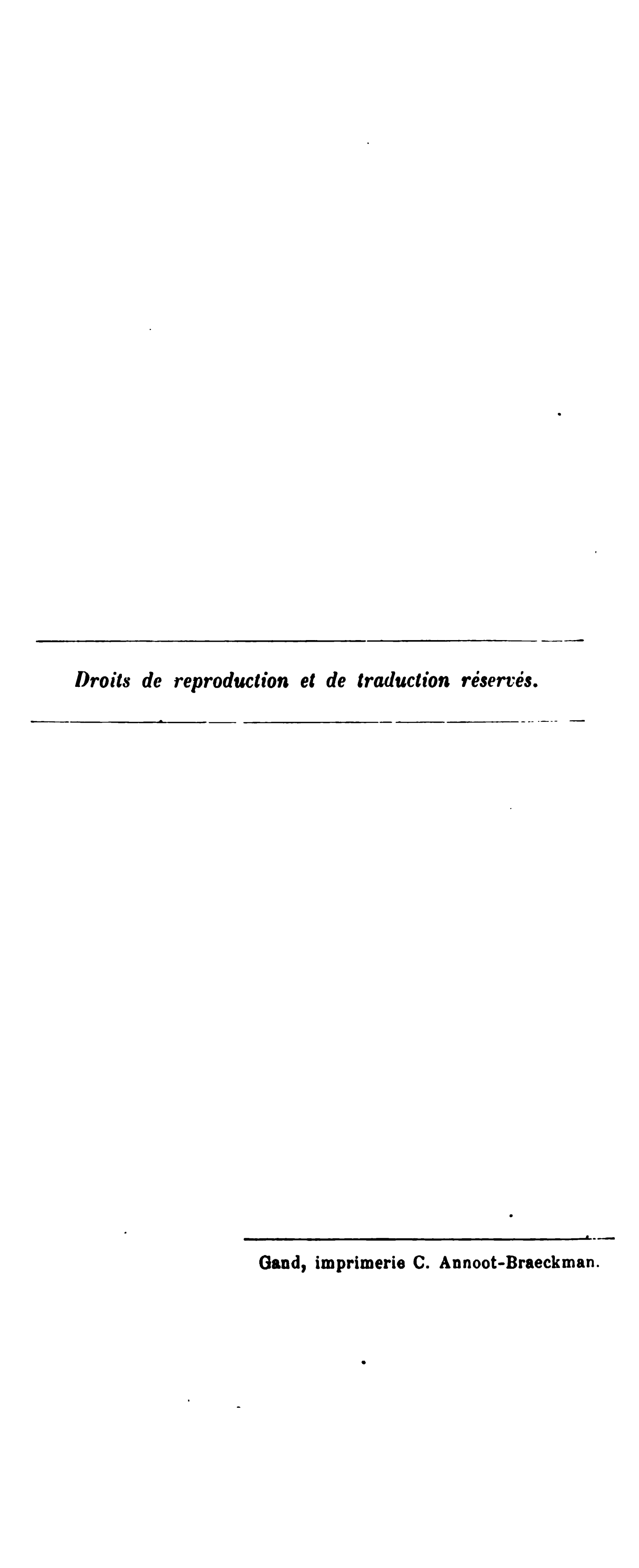




COURS

DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE



Gand, imprimerie C. Annoot-Braeckman.

COURS

DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

PAR

PH. GILBERT

Docteur en sciences physiques et mathématiques
Professeur à la faculté des sciences de l'Université catholique de Louvain
Membre correspondant de l'Académie Pontificale des *Nuovi Lincei* et de la Société Philomathique de Paris.

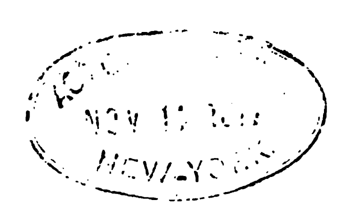
PARTIE ÉLÉMENTAIRE

> « S'il nous était donné d'apercevoir les molécules des corps,..... elles présenteraient à nos regards des espèces de constellations ; et en passant de l'infiniment grand à l'infiniment petit, nous retrouverions dans les dernières particules de la matière, comme dans l'immensité des cieux, des centres d'action placés en présence les uns des autres. »
>
> CAUCHY.

LOUVAIN
CH. PEETERS, LIBRAIRE-ÉDITEUR

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, LIBRAIRE

1877


NEW-YORK

Ce *Cours de Mécanique* a été composé sur un plan analogue à celui du *Cours d'Analyse* que j'ai publié en 1872, et pour satisfaire à des exigences tout à fait semblables.

Sa destination principale est de servir de *Manuel* aux élèves ingénieurs qui suivent le cours de Mécanique rationnelle dont je suis chargé à la Faculté des Sciences, afin de leur épargner la tâche pénible de recueillir eux-mêmes les leçons. Il a donc fallu, pour mettre ce manuel en rapport avec le but poursuivi par mes auditeurs et avec le temps limité dont ils disposent pour l'étude de la mécanique, écarter de mon programme plusieurs questions d'un intérêt plus spéculatif que pratique, quoiqu'habituellement traitées dans les écrits du même genre, et m'appliquer surtout aux théories d'une importance générale ou d'un usage fréquent dans la mécanique appliquée, dans la construction, dans la théorie des machines, etc.

Voulant toutefois que cet ouvrage pût servir aux jeunes gens, bien moins nombreux, qui ont en vue les épreuves de la licence ou du doctorat en sciences mathématiques, l'étude de la physique mathématique ou de la mécanique céleste, et qui réclament un enseignement

plus approfondi, j'ai eu recours au procédé que j'avais adopté dans le cours d'analyse. Je me suis d'abord attaché, autant que cela m'a été possible, à maintenir l'exposition des théories fondamentales de la science à la hauteur désirable, en ne recherchant pas une certaine clarté superficielle aux dépens de la rigueur des raisonnements, rigueur qu'il importe de ne jamais sacrifier.

En second lieu, j'ai réservé pour un autre volume, destiné à former comme le complément de celui-ci, l'exposition de certaines théories plus élevées, sorte de transition entre la mécanique et la physique mathématique. Telles sont : la théorie de l'attraction et celle du potentiel qui s'y rattache intimement, — les théories dynamiques d'Hamilton et de Jacobi, — la solution de diverses questions au moyen des fonctions elliptiques, — les principes de la mécanique moléculaire, de l'élasticité et des mouvements vibratoires, — un certain nombre de problèmes se rapportant aux corps semi-fluides et à l'hydrodynamique ; — peut-être, enfin, la thermodynamique.

Mon ambition a été, non pas de présenter aux élèves une exposition neuve et originale des doctrines de la mécanique, mais de condenser ce que j'ai trouvé de meilleur, de plus clair et de plus exact dans les nombreux ouvrages, didactiques ou autres, que j'ai consultés. Indépendamment des grands travaux de Lagrange et de Cauchy, je citerai particulièrement les *Cours de Mécanique* de Duhamel et de Bour, le *Traité de Mécanique générale* de M. Résal, la *Mécanique rationnelle* de M. Laurent, la *Theorie der Bewegung und Kräfte* de M. Schell, la *Statique* de M. Moigno, la *Théorie mécanique de la chaleur* de M. Briot.

J'ai aussi utilisé, dans certaines questions, les notes que j'avais recueillies en 1854-55 aux excellentes leçons de M. Puiseux au Collége de France.

L'extrême utilité des problèmes et des applications, pour former les jeunes gens à l'usage des formules de la mécanique rationnelle, est

unanimement reconnue. Aussi, je ne me suis pas contenté de développer un certain nombre de questions, telles que celles de la rotation d'un corps pesant fixé par un point, des mouvements relatifs à la surface de la terre, dont l'importance au point de vue de l'ingénieur est moins apparente que leur utilité comme applications des théories générales: j'ai aussi, comme dans mon *Cours d'analyse*, terminé chaque chapitre par un bon nombre d'exercices, dont une partie a été empruntée à l'excellent ouvrage du P. Jullien, à ceux de M. Vieille, de M. Fuhrmann, aux publications périodiques, etc.

Les renvois indiqués de cette manière : COURS D'AN., N°..., se rapportent à l'édition de 1872, aujourd'hui épuisée, de la partie élémentaire de mon *Cours d'Analyse infinitésimale*. J'ose espérer que le public studieux, qui a fait un si bon accueil à ce premier volume, recevra avec indulgence celui que je lui présente aujourd'hui.

Louvain, janvier 1877.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE TROISIÈME. — DYNAMIQUE.

LIVRE QUATRIÈME. — HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE.

ERRATA.

Page.	Ligne.	Erreur.	Correction.
93	2 en rem.	immédiatememt,	immédiatement.
240	19 en desc.	se sont,	ne sont
250	2 en rem.	$Mg\,[-z_1\,(z_1)_0]$,	$Mg\,[z_1-(z_1)_0]$
300	15 en desc.	$K=\frac{Cn}{A}$,	$k=\frac{Cn}{A}$.

503. Dans la figure, on a pour plus de clarté, supprimé deux branches qui rattachent l'anneau à l'axe d'acier, et qui sont placées dans un plan perpendiculaire à celui qui renferme les deux premières.

COURS

DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

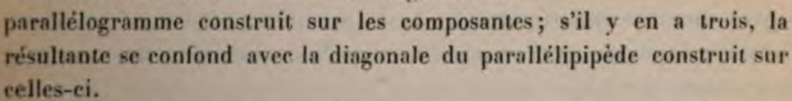
NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES RÉSULTANTES.

1. Si des droites OA, OB, OC..., OE partant d'un même point O, ont chacune une longueur et une direction déterminées; si l'on porte bout à bout, à partir du point A, les droites AB′, B′C′,.... respectivement égales et parallèles à OB, OC,... et dans le même sens que celles-ci, la droite OE′, qui joint le point O à l'extrémité de la dernière droite et ferme le polygone, se nomme la *résultante* des droites données OA, OB,....



Celles-ci se nomment réciproquement les *composantes* de la droite OE′.

Si les composantes se réduisent à deux, la résultante se confond avec la diagonale du parallélogramme construit sur les composantes; s'il y en a trois, la résultante se confond avec la diagonale du parallélipipède construit sur celles-ci.



Menons par le point O une droite indéfinie OX. En vertu du *théorème des projections*, si l'on parcourt le contour fermé OAB′C′... E′O toujours dans le même sens, en multipliant chaque côté par le cosinus de l'angle

que fait sa direction, prise dans le sens du mouvement, avec la direction donnée OX, la somme de ces produits sera nulle. Si donc $P, P', P'', \ldots, R$ désignent respectivement les longueurs des droites données OA, OB, OC,... et de leur résultante OE'; $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots, a$ les angles que forment leurs directions avec celle de OX, on aura l'équation

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \cdots \quad - R \cos a = 0,$$

le dernier terme étant affecté du signe —, parce que la résultante OE' est parcourue en sens contraire de sa direction propre, ce qui change le signe du cosinus de l'angle qu'elle fait avec OX. Donc

$$(1) \qquad R \cos a = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \cdots,$$

c'est-à-dire que *la projection de la résultante de plusieurs droites sur une direction donnée quelconque est égale à la somme algébrique des projections des composantes sur cette même direction.*

2. On détermine la direction d'une droite $OA = P$ au moyen des angles α, β, γ que forme cette direction avec les directions positives de trois axes coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ, menés à partir du point O. Chacun de ces angles peut varier de 0° à 180°, son cosinus de $+1$ à -1. Les *cosinus directeurs* d'une droite OA étant donnés, en grandeur et en signe, déterminent donc sans aucune ambiguité la direction de cette droite : la direction opposée AO est caractérisée par des cosinus directeurs respectivement égaux et de signes contraires.

Les projections de la droite P sur les axes

$$P \cos \alpha, \quad P \cos \beta, \quad P \cos \gamma,$$

sont, d'après la remarque faite ci-dessus, égales aux *composantes* de cette droite parallèlement à OX, OY, OZ, et de plus, les signes dont elles sont affectées (suivant que les angles α, β, γ sont aigus ou obtus) montrent si ces composantes sont dirigées dans le sens des axes coordonnés positifs ou des axes négatifs. Par une convention qui nous sera très-utile, nous regarderons ces composantes P_x, P_y, P_z de la droite P comme *positives* dans le premier cas, comme *négatives* dans le second. Alors nous aurons, en grandeur et en signe,

$$P_x = P \cos \alpha, \quad P_y = P \cos \beta, \quad P_z = P \cos \gamma,$$

et réciproquement, les composantes d'une droite P suivant trois axes rec-

tangulaires détermineront complétement cette droite en grandeur et en direction, puisque l'on aura

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{P_x}{P}, \quad \cos\beta = \frac{P_y}{P}, \quad \cos\gamma = \frac{P_z}{P}.$$

3. Supposons un nombre quelconque de droites $OA = P$, $OB = P'$, $OC = P''$,... partant d'un point O, et déterminons analytiquement leur résultante R. Décomposons d'abord la droite P suivant trois axes OX, OY, OZ partant du point O; la grandeur et la direction de la droite P feront connaître, par ce qui précède, ses composantes P_x, P_y, P_z suivant ces axes. Faisons la même opération pour chacune des droites P', P''... et pour leur résultante R. L'équation (1) nous donnera immédiatement la relation

$$R_x = P_x + P'_x + P''_x + \dots.$$

entre les composantes de P, P', P'',.. R suivant OX, et deux autres semblables pour les deux autres axes. Si donc nous désignons par Σ une somme de termes semblables qui s'étend à toutes les droites P, P', P''..., nous aurons les égalités

$$(2) \qquad R_x = \Sigma P_x, \quad R_y = \Sigma P_y, \quad R_z = \Sigma P_z.$$

Donc, *la résultante* R *d'un nombre quelconque de droites* P, P'... *a pour composantes, suivant trois axes rectangulaires, les sommes algébriques des composantes, suivant ces mêmes axes respectivement, de toutes les droites données* P, P',....

Réciproquement, et cette remarque nous sera fort utile, toute droite Q qui jouirait de la propriété énoncée, coïnciderait nécessairement avec la résultante R des droites P, en grandeur et en direction. En effet, on a vu plus haut qu'une droite est parfaitement déterminée en grandeur et en direction, dès que ses composantes suivant trois axes rectangulaires sont données en grandeur et en signe. Donc, les composantes ΣP_x, ΣP_y, ΣP_z de la droite Q coïncidant avec celles de la résultante R des droites P, les droites Q et R se confondent en grandeur et en direction. Donc

Lorsque les composantes d'une droite suivant trois axes rectangulaires sont les sommes algébriques des composantes, suivant ces mêmes axes respectivement, de droites données en nombre quelconque, cela suffit pour que l'on puisse affirmer que cette droite n'est autre que la résultante des droites données.

Il est toujours entendu qu'il s'agit de droites partant d'une même origine O.

4. Les équations (2) conduisent encore aux conséquences suivantes : 1° Si a, b, c désignent les angles directeurs par rapport à OX, OY, OZ, de la résultante R des droites P, P'..., on aura les relations

$$R^2 = (\Sigma P_x)^2 + (\Sigma P_y)^2 + (\Sigma P_z)^2,$$

$$\cos a = \frac{\Sigma P_x}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma P_y}{R}, \quad \cos c = \frac{\Sigma P_z}{R}.$$

2° Quel que soit l'ordre dans lequel on dispose les composantes P, P',... pour effectuer la construction polygonale qui fournit leur résultante R, *pourvu que l'on conserve à chacune d'elles sa direction propre,* la résultante R ne change ni de grandeur ni de direction; car une interversion dans l'ordre des droites P, P',... ne modifie en rien les quantités ΣP_x, ΣP_y, ΣP_z, ce qui suffit pour établir la propriété énoncée.

3° Si les composantes P, P',... sont dirigées suivant une même droite, les unes dans un sens, les autres en sens contraire, et que l'on affecte les premières du signe +, les autres du signe —, la résultante des droites P, P',... sera donnée, en grandeur et en direction, par la somme algébrique des composantes. Il suffit, pour s'en assurer, de prendre pour axe OX la direction commune des forces, et d'observer qu'alors, en vertu de la convention sur les signes de P, P',...., l'équation $R_x = \Sigma P_x$ se réduit à

$$R = \Sigma P.$$

LIVRE PREMIER.

CINÉMATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA VITESSE D'UN POINT.

5. La *Mécanique* est la science qui a pour objet l'étude du mouvement que prennent les corps dans des conditions déterminées. Pour simplifier cette étude, il est commode d'étudier d'abord le mouvement en lui-même, abstraction faite des causes qui le produisent ou qui le modifient, et l'on nomme *cinématique* la partie de la mécanique qui traite de ces questions.

Tout le monde sait ce qu'on entend par le mot *mouvement*. Quand les distances entre les points de deux corps varient d'une manière continue, nous disons que l'un est en mouvement par rapport à l'autre. Lorsqu'un corps se déplace par rapport à un système d'autres corps, qui conservent les uns relativement aux autres des positions invariables, le premier est dit en mouvement par rapport à ce système de corps. La conception du mouvement, prise en elle-même, est donc toujours *relative*. Mais si nous choisissons un certain système de corps ou de lignes idéales qui en dépendent, et si nous leur attribuons, par une pure détermination de notre esprit, la propriété d'être *fixes, immobiles,* nous pouvons rapporter

à ce système les mouvements des autres corps en étudiant leurs changements de position par rapport à lui. Ces mouvements, ainsi rapportés à un système de figure invariable, tel qu'un système d'axes rectangulaires, et considéré comme immobile dans l'espace, seront ceux que nous appellerons *mouvements absolus* : nous n'attribuerons pas un autre sens à cette expression.

6. On fait souvent usage dans la géométrie de la considération du mouvement; ainsi, on regarde une surface comme engendrée par le déplacement d'une certaine courbe. Mais cette manière de considérer le mouvement se distingue par un caractère essentiel de celle que nous allons examiner : on y fait abstraction du *temps* que la figure mobile met à passer d'une position à une autre. L'objet propre de la cinématique est, au contraire, ce rapport entre les positions successives d'une même figure et les époques correspondantes.

D'autre part, comme l'indique la définition, la cinématique se distingue de la mécanique proprement dite en ce qu'elle ne s'occupe pas des causes qui produisent le mouvement ou qui le modifient : elle ne voit que les mouvements eux-mêmes, et à raison de ce point de vue où elle se place, elle fait aussi abstraction des qualités matérielles des corps, des différences de nature, de poids, etc., qu'ils peuvent offrir, pour ne voir que leur figure géométrique qui se déplace.

Nous étudierons successivement 1° le mouvement d'un simple *point géométrique;* 2° le mouvement d'un *système de points* conservant une figure invariable, ce que nous appelons, pour abréger, un *solide.*

7. La notion du *temps*, qui entre dans celle du mouvement, est de celles que nous possédons indépendamment de toute définition : elle nous est donnée par la succession de phénomènes qui se passent sous nos yeux. Mais il est nécessaire, pour pouvoir mesurer le temps, de définir d'une manière précise ce qui constitue l'*égalité* des temps.

Nous disons que deux intervalles de temps sont *égaux*, lorsqu'un même corps, placé dans des conditions parfaitement identiques de part et d'autre, exécute pendant ces deux intervalles de temps, des mouvements identiques. Nous n'examinons pas ici les procédés plus ou moins rigoureux à l'aide desquels on réalise en pratique cette comparaison de deux intervalles de temps. De la définition de l'égalité, on passe sans peine à celle d'un rapport entier, fractionnaire, incommensurable entre deux temps, d'où il suit qu'un intervalle déterminé étant choisi pour unité, tout autre

intervalle sera représenté par le nombre qui mesure son rapport à l'unité adoptée.

Le choix de cette unité est arbitraire et les théories de la mécanique en sont nécessairement indépendantes; mais, dans l'usage ordinaire et pour les applications, on prend comme unité la *seconde de temps moyen*, c'est-à-dire la 86400me partie du jour solaire moyen déterminé par les observations astronomiques. Nous prendrons pour *unité de longueur le mètre*, dont la détermination est bien connue.

8. La ligne que décrit un point dans son mouvement se nomme sa *trajectoire* : elle peut être *rectiligne* ou *curviligne*. Les notions suivantes sont communes à ces deux genres de mouvements. Nous donnerons ensuite celles qui se rapportent exclusivement au mouvement curviligne.

Le mouvement d'un point est *uniforme*, lorsqu'il parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, si petits que soient ces temps; en sorte que les arcs décrits par le point mobile sont proportionnels aux temps qu'il met à les décrire. On nomme *vitesse*, dans le mouvement uniforme, ce rapport constant qui existe entre les espaces parcourus et les temps correspondants; — ou encore, l'espace parcouru dans un temps égal à l'unité.

Quand le mouvement d'un point n'est ni uniforme, ni composé d'une suite de mouvements uniformes, il est dit *varié*. La définition de la vitesse appliquée à un tel mouvement, ne représenterait plus rien de déterminé, mais on la généralise comme il suit pour tous les mouvements.

Désignons par t le temps, compté depuis une époque déterminée que l'on choisit pour origine du temps, jusqu'à l'instant où le point mobile occupe une position M sur la ligne, droite ou courbe, qu'il décrit. Soit M' la position qu'il occupe à l'époque $t + \Delta t$. Divisant l'arc MM' par Δt, on aura ce qu'on appelle la *vitesse moyenne* du point pendant le temps Δt. Supposons Δt infiniment petit, et par suite MM' : la limite de la vitesse moyenne, ou la limite du rapport

$$\frac{\text{arc MM}'}{\Delta t},$$

est ce que l'on nomme la *vitesse* du point à l'époque t.

Pour déterminer le mouvement du point sur sa trajectoire, supposée connue, on prend sur celle-ci une origine fixe A, et l'on désigne par s la longueur de l'arc compris entre cette origine et le point M où se trouve

le mobile à l'époque t. Si l'on connaît la relation entre les variables s et t, on connaîtra parfaitement la loi du mouvement, puisque l'on pourra assigner, pour une époque quelconque, la position qu'occupe le mobile à cet instant. Cela posé, il suit de la définition générale ci-dessus, que si v désigne la vitesse du mobile à l'époque t, on aura *arc* $MM' = \Delta s$, d'où



$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Ainsi, *dans un mouvement quelconque, la vitesse est la dérivée de l'espace parcouru par rapport au temps.*

Pour que l'expression de la vitesse fasse connaître en même temps *dans quel sens* le point parcourt sa trajectoire, il suffit de compter l'arc s à partir du point A, positivement dans un sens, négativement en sens contraire, et d'attribuer à la vitesse une valeur *positive* ou *négative* selon que le point se meut dans le premier sens ou dans le second. La dérivée $D_t s$ étant positive ou négative selon que s croît ou décroît, l'équation ci-dessus sera toujours exacte en grandeur et en signe, et ce signe fera connaître dans quel sens le mouvement a lieu.

9. Le cas du mouvement uniforme est renfermé dans ce cas général; on a $v = a$, a étant une constante. L'expression de la vitesse donne donc

$$\frac{ds}{dt} = a,$$

et par suite, intégrant et désignant par s_0 la valeur de s pour $t = o$, on obtient

$$s = at + s_0.$$

Cette équation, qui fait connaître la position du point à un instant quelconque, se nomme l'*équation du mouvement uniforme*. Il faut bien remarquer que s_0, s, a, peuvent y avoir des signes quelconques, en sorte que l'équation convient à toutes les circonstances du mouvement.

Il suffit de connaître les positions occupées par le point à deux instants donnés pour avoir la loi de son mouvement. Car, soient s_1 et s_2 les distances (positives ou négatives) du mobile à l'origine A, aux époques marquées par t_1 et t_2. D'après l'équation ci-dessus, on a

$$s = at + s_0, \quad s_1 = at_1 + s_0, \quad s_2 = at_2 + s_0,$$

d'où

$$s_2 - s_1 = a(t_2 - t_1), \quad a = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \quad s - s_1 = a(t - t_1),$$

et en éliminant a,

$$s - s_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}(t - t_1),$$

équation qui détermine s en fonction de t. La vitesse a est égale à

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Dans un mouvement varié quelconque, v ne serait plus constant; si sa valeur était donnée en fonction de t, on en déduirait s par l'équation

$$s = s_0 + \int_0^t v\,dt,$$

et le mouvement serait encore connu.

10. ***Mouvement curviligne.*** Ce qui précède est indépendant de la forme de la trajectoire, mais lorsque celle-ci est une courbe, on doit considérer en outre la *direction* du mouvement.

Rapportons le mouvement du point à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ. Les coordonnées x, y, z du mobile à l'époque t sont des fonctions déterminées du temps t, et si ces fonctions sont données

$$x = f(t), \quad y = f_1(t), \quad z = f_2(t),$$

on saura assigner, pour une valeur quelconque du temps, la position du point, et son mouvement sera parfaitement connu. Ces équations sont celles du mouvement du point. Elles se présentent aussi sous la forme plus générale

$$F(x, y, z, t) = 0, \quad F_1(x, y, z, t) = 0, \quad F_2(x, y, z, t) = 0.$$

L'élimination du temps t entre ces trois équations conduira à deux équations entre les coordonnées x, y, z seulement

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \varphi_1(x, y, z) = 0.$$

Ce seront les équations de la trajectoire.

Cela posé, dans un mouvement rectiligne, la direction du mouvement du point à un instant quelconque est bien déterminée : c'est celle de la droite qu'il parcourt, prise dans le sens du mouvement. Mais dans le mouvement curviligne, il faut définir la direction de la vitesse, car la droite

MM' qui joint les positions du mobile à deux époques t, $t + \Delta t$, varie de direction d'après les valeurs de t, Δt. Or, si Δt est infiniment petit, la direction MM' tend vers une limite MV, qui n'est autre que celle de la tangente à la trajectoire en M, menée dans le sens où le mouvement a lieu : *c'est cette direction* MV *que l'on est convenu de prendre pour celle de la vitesse du point mobile en* M.

Si donc on porte à partir du point M où se trouve le mobile, sur la tangente à la trajectoire et dans le sens du mouvement, une longueur MV proportionnelle à la vitesse actuelle v, cette droite MV représentera en grandeur et en direction la vitesse du point à l'époque t.

Admettons que l'arc s qui fixe la position du point sur sa trajectoire soit compté positivement dans le sens du mouvement. Les cosinus directeurs de la tangente MV, prise dans ce sens, ont pour expressions (Cours d'Anal.; 176)

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds};$$

tels sont donc les *cosinus directeurs de la vitesse*. En multipliant respectivement par ces cosinus la vitesse v elle-même, nous aurons (2) les *composantes* v_x, v_y, v_z *de la vitesse* parallèlement à OX, OY, OZ; donc

$$v_x = v\frac{dx}{ds}, \quad v_y = v\frac{dy}{ds}, \quad v_z = v\frac{dz}{ds},$$

ou, en mettant pour v sa valeur $ds : dt$,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Ces expressions des composantes de la vitesse, dont nous ferons constamment usage, conduisent à une conséquence remarquable. Projetons le point mobile sur l'axe OX, et considérons cette projection comme un nouveau point mobile M_1 qui parcourt cet axe. La variable x représente à la fois l'abscisse du point M et celle de sa projection M_1, ou la distance de ce dernier point à l'origine O sur la droite qu'il parcourt. Donc, d'après la définition de la vitesse, $\frac{dx}{dt}$ mesure, en grandeur et en signe, la vitesse du point M_1 sur OX. La même chose ayant lieu pour les autres axes, *les composantes de la vitesse d'un point parallèlement à trois axes rectangulaires sont respectivement égales, en grandeur et en signe, aux*

vitesses des projections du point mobile sur ces mêmes axes, au même instant.

Mais la signification complète de la décomposition des vitesses ressortira de la théorie du mouvement relatif, dont nous allons parler.

CHAPITRE II.

DE LA VITESSE RELATIVE ET DE LA COMPOSITION DES VITESSES.

11. Nous avons considéré jusqu'ici le mouvement d'un point par rapport à trois axes supposés immobiles dans l'espace, ou son mouvement absolu. Concevons qu'un système, invariable de forme, ait par rapport à ces mêmes axes fixes un mouvement connu : à chaque instant, le point mobile occupera par rapport à ce *système de comparaison* une position déterminée; il aura donc, relativement à lui, un certain mouvement, différent en général de son mouvement par rapport aux axes fixes, et que l'on nomme pour cette raison son *mouvement relatif* par rapport au système de comparaison.

Ce mouvement relatif est celui qu'un observateur, emporté dans le mouvement du système de comparaison sans avoir conscience du déplacement qu'il éprouve, attribuerait au point mobile au lieu de son mouvement absolu : c'est pour cela que les mouvements relatifs sont appelés souvent *mouvements apparents*. Ainsi, une personne placée dans la cabine d'un bateau glissant rapidement sur un canal, attribue à un corps, tombant dans l'intérieur de la cabine, un mouvement rectiligne vertical, tandis qu'en réalité ce corps parcourt une parabole.

On se fait encore une idée précise du mouvement relatif en imaginant un point *fictif* M′ dont les coordonnées par rapport aux axes fixes OX, OY, OZ, à chaque instant, seraient respectivement égales aux coordonnées ξ, η, ζ du point mobile M par rapport aux axes $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$, auxquels nous pouvons réduire pour plus de simplicité le système de comparaison mobile. Le mouvement absolu de ce point fictif M′ sera précisément ce que nous appelons le mouvement relatif du point M.

Le lieu des positions successives que le mobile M vient occuper dans le système de comparaison $O'\xi\eta\zeta$ est une courbe qui s'appelle la *trajectoire*

relative (elle est la même que la trajectoire absolue du point M′ dans le mouvement fictif). Il faut se représenter cette trajectoire relative comme une ligne faisant corps avec le système de comparaison et entraînée avec lui ; pendant que le mobile M parcourt cette ligne en vertu de son mouvement relatif, la ligne elle-même vient occuper dans l'espace les positions successives qui répondent au mouvement du système de comparaison, et c'est la combinaison de ces deux mouvements qui produit le mouvement absolu du point M par rapport au système regardé comme fixe. Il est clair que, si l'on connaît le mouvement du système de comparaison rapporté aux axes fixes et le mouvement absolu du point, on pourra construire tous les points de la trajectoire relative.

Enfin, la *vitesse relative* du point mobile n'est autre que la vitesse qu'il possède par rapport au système de comparaison : elle est donc mesurée par la dérivée, par rapport au temps, de l'arc de la trajectoire relative, et sa direction est celle de la tangente à la trajectoire relative, dans sa position actuelle, menée par le point M et dans le sens du mouvement relatif : ses composantes parallèles à $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ sont $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$.

12. Ces définitions posées, cherchons les relations entre la vitesse absolue v du point mobile, sa vitesse relative v' qui vient d'être définie, et sa *vitesse d'entraînement* v'', c'est-à-dire la vitesse absolue qu'aurait le point M si, dans sa position actuelle, il était fixé au système de comparaison. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de l'origine mobile O′, et

	$O'\xi$	$O'\eta$	$O'\zeta$
OX	a	b	c
OY	a'	b'	c'
OZ	a''	b''	c''

les neuf cosinus directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes ; ce sont des fonctions du temps que nous supposons connues, et qui définissent le mouvement du système de comparaison. On a, à chaque instant,

$$\begin{cases} x = x_1 + a\xi + b\eta + c\zeta, \\ y = y_1 + a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z = z_1 + a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{cases}$$

relations qui font connaître le mouvement absolu si le mouvement relatif est connu, et inversement. Dérivant la première équation par rapport au temps, on a

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{dx_1}{dt}+\xi\frac{da}{dt}+\eta\frac{db}{dt}+\zeta\frac{dc}{dt}\right)+\left(a\frac{d\xi}{dt}+b\frac{d\eta}{dt}+c\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Le premier membre est la composante v_x de la vitesse absolue ; le premier groupe du second membre est ce que deviendrait v_x si ξ, η, ζ étaient constants, ou si le point M était fixé dans le système de comparaison : c'est donc la composante v''_x de la vitesse d'entraînement parallèlement à OX. Le second groupe représente de même la composante v'_x de la vitesse relative, car ses composantes parallèles aux axes mobiles étant $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, et ces axes faisant avec OX des angles dont les cosinus sont a, b, c, sa projection sur OX sera (1)

$$a\frac{d\xi}{dt}+b\frac{d\eta}{dt}+c\frac{d\zeta}{dt}.$$

L'équation précédente revient donc à celle-ci :

$$v_x=v'_x+v''_x,$$

et l'on trouverait de même, en différentiant les valeurs de y et de z,

$$v_y=v'_y+v''_y, \qquad v_z=v'_z+v''_z.$$

De ces équations, et de la réciproque énoncée au N° 3, il suit que *la vitesse absolue du point mobile est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement.*

Si donc MV', MV'' représentent la vitesse relative du point mobile et la vitesse absolue du point correspondant du système de comparaison, la diagonale MV du parallélogramme construit sur MV', MV'' figurera en grandeur et en direction la vitesse absolue du point M.

Et réciproquement, si l'on tire MW égal et directement opposé à MV'', il suit des propriétés du parallélogramme que WV' sera égal et parallèle à MV, donc *la vitesse relative d'un point par rapport à un système mobile est la résultante de sa vitesse absolue et de sa vitesse d'entraînement, prise en sens contraire.*

13. *Composition d'un nombre quelconque de vitesses.* — Le système rectangulaire OXYZ, que nous avons regardé comme immobile, peut être

supposé animé lui-même d'un mouvement quelconque par rapport à un troisième système rectangulaire $AX_1Y_1Z_1$, auquel on rapporterait le mouvement absolu du point. Rien ne serait changé au calcul qui précède; seulement, la vitesse MV, résultante de la vitesse relative MV′ par rapport au système $O'\xi\eta\zeta$, et de la vitesse d'entraînement MV″ du système $O'\xi\eta\zeta$ par rapport à OXYZ, ne représenterait plus la vitesse absolue du point M, mais seulement sa vitesse relative par rapport au système OXYZ. Donc, pour obtenir la vitesse absolue, c'est-à-dire la vitesse par rapport au système $AX_1Y_1Z_1$, que nous regardons maintenant comme le système fixe, nous devrons, par une nouvelle application du théorème établi plus haut, chercher la résultante MV_1 de la vitesse relative MV par rapport à OXYZ, et de la vitesse d'entraînement MV‴ dont le point M est animé dans le mouvement du système OXYZ par rapport à $AX_1Y_1Z_1$, mouvement supposé connu. D'où il suit, enfin, que la vitesse absolue ou *totale* MV_1 sera la résultante des vitesses MV′, MV″, MV‴, ou la diagonale du parallélipipède construit sur ces vitesses.



Ce raisonnement s'étend facilement, quel que soit le nombre des systèmes de comparaison intercalés entre le point mobile et le système d'axes auquel on attribue l'immobilité, et conduit à la règle suivante : *La vitesse absolue du point mobile est la résultante de sa vitesse relative par rapport au premier système, et de toutes ses vitesses d'entraînement dues au mouvement du premier système par rapport au second, du second par rapport au troisième, et ainsi de suite.*

Il est clair que si l'on intervertit l'ordre de succession des systèmes de comparaison, on ne change rien au résultat final. Il arrive fréquemment que l'on doive considérer simultanément plusieurs mouvements relatifs : un corps se meut par rapport à un bateau, qui se déplace relativement au globe terrestre; celui-ci à son tour se meut autour de son axe, lequel se transporte autour du soleil, etc. On dit souvent, dans ce cas, que le corps est *animé simultanément de plusieurs mouvements*, expression qui ne doit être entendue que dans le sens défini ci-dessus, savoir : que le corps a un mouvement déterminé par rapport à un système invariable, qui se meut lui-même par rapport à un second système, et ainsi de suite. La règle ci-dessus fournira toujours la vitesse totale ou définitive dont le

point mobile est animé par rapport au système que l'on regarde comme fixe et auquel on rapporte les mouvements absolus.

Ce qui précède donne un sens nouveau à la décomposition de la vitesse v d'un point parallèlement à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, dont il a été question au chapitre précédent : les composantes v_x, v_y, v_z peuvent être considérées comme des vitesses simultanées dont le point M est animé. En effet, si l'on imagine qu'un point glisse avec une vitesse relative v_x sur une droite AB constamment parallèle à l'axe OX, pendant que cette droite se meut dans un plan EFG parallèle à XY avec une vitesse v_y parallèle à OY, en même temps que ce plan EFG lui-même est animé, parallèlement à l'axe OZ, d'une vitesse v_z, il résulte clairement de la loi de composition des vitesses simultanées exposée ci-dessus, que ce point aura par rapport au système OXYZ une vitesse égale à la résultante des vitesses v_x, v_y, v_z, c'est-à-dire qui se confondra en grandeur et en direction avec la vitesse v du point mobile M. Ainsi le mouvement d'un point quelconque peut toujours être regardé comme une combinaison de mouvements rectilignes.



14. *Méthode de Roberval.* — La théorie de la composition des vitesses offre des applications géométriques intéressantes. Quand le mouvement d'un point décrivant une courbe peut être regardé comme résultant de deux ou trois mouvements plus simples par rapport à des systèmes invariables mobiles, il suffit de tracer les vitesses élémentaires, de construire leur résultante par la règle donnée, pour obtenir la direction de la vitesse totale et par suite celle de la tangente à la courbe tracée par le point mobile. Telle est la méthode imaginée par Roberval pour mener des tangentes aux courbes.

Ex. : La spirale d'Archimède, dont l'équation polaire est $r = a\theta$, peut être regardée comme décrite par un point M qui glisse d'un mouvement uniforme sur le rayon OP $= a$ d'un cercle, tandis que l'extrémité P de ce rayon décrit le cercle d'un mouvement également uniforme. La vitesse relative dirigée suivant OP, est représentée par une longueur constante MV′. La vitesse d'entraînement n'est autre que celle du point M supposé lié au rayon mobile OP ; elle est évidemment perpendiculaire à OP et proportionnelle au rayon OM. Soit MV″ cette vitesse



d'entraînement : la résultante MV de MV′ et MV″ sera la vitesse totale du point M; MV est donc tangente à la spirale en M.

Cette méthode, dont les ressources seront mieux comprises après les chapitres suivants, s'applique aux sections coniques, etc., mais pour éviter des erreurs auxquelles Roberval n'a pas échappé, il faut avoir soin que les vitesses dont on compose la vitesse du point M soient bien des vitesses relative et d'entraînement dans le sens que nous avons attaché à ces mots (1).

Exercices.

1. Construire la tangente à l'ellipse, considérée comme lieu d'un point mobile dont la somme des distances à deux foyers est constante.

R. Sur chaque rayon recteur considéré isolément, la vitesse relative est la même, mais de sens contraire : d'où la propriété de la tangente à l'ellipse.

2. Tangente à la *conchoïde*, décrite par un point M d'une droite passant par un pôle fixe O, et dont un autre point B décrit une droite donnée.

R. Les vitesses relatives des points B, M sur la droite sont égales, leurs vitesses d'entraînement proportionnelles aux distances OB, OM.

3. Tangente à la cycloïde. — *R.* On concevra que le cercle glisse parallèlement à la base, pendant que le point générateur parcourt la circonférence avec une vitesse égale. On trouve la propriété connue.

4. Un point mobile étant rapporté aux coordonnées polaires ordinaires r, φ, θ, déduire de la composition des vitesses l'expression de la différentielle de l'arc décrit.

R. La vitesse est la résultante d'une vitesse relative suivant le rayon recteur r, d'une vitesse d'entraînement dans le plan azimutal, d'une seconde vitesse d'entraînement perpendiculaire au plan azimutal : on trouve

$$v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{dt^2},$$

d'où la solution de la question.

---

(1) On consultera avec fruit, sur ce sujet, une note de Duhamel *Sur la méthode des tangentes de Roberval*; — Schell, *Theorie der Bewegung und Kräfte*; — Bour, *Cinématique*, p. 51. — Résal, *Traité de cinématique pure*, p. 19. — Lamarle. *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure.*

CHAPITRE III.

DES MOUVEMENTS SIMPLES D'UN SOLIDE.

15. Pour étudier le mouvement d'un solide, au point de vue des vitesses dont ses points sont animés, nous distinguerons les mouvements *simples*, c'est-à-dire ceux de *translation* et de *rotation autour d'un axe fixe*, puis les mouvements plus complexes du solide *parallèlement à un plan fixe*, *autour d'un point fixe*, et enfin le *mouvement quelconque d'un solide libre*.

La position d'un solide est donnée, quand on connaît celles de trois de ses points, A, B, C, non en ligne droite. Concevons que le point A décrive une trajectoire quelconque avec une vitesse quelconque; que la droite AB reste parallèle à elle-même dans ce mouvement, et qu'il en soit de même de AC. Le plan ABC restant donc toujours parallèle à lui-même, il en sera encore ainsi, à cause de l'invariabilité du système, de tout autre plan ou de toute autre droite appartenant au solide. Il suit de là que les droites AA', BB', CC',... qui joignent deux à deux les positions d'un même point du solide à deux époques t, $t + \Delta t$, sont toutes égales et parallèles, et l'on en conclut, en faisant Δt infiniment petit, qu'*à chaque instant, tous les points du solide sont animés de vitesses égales et parallèles*.

Un tel mouvement se nomme un *mouvement de translation* : tous les points décrivant des trajectoires égales avec des vitesses égales, le mouvement d'un seul point fait connaître celui du solide tout entier, en sorte qu'il n'y a rien de plus à dire sur ce sujet.

Si, dans un mouvement quelconque d'un solide, à un certain instant, tous ses points ont des vitesses égales et parallèles, on dit que le mouvement du solide est une *translation instantanée*.



16. *Rotation autour d'un axe fixe.* — Quand deux points A et B d'un solide sont fixes, tous les points situés sur la droite AB le sont; le mouvement du solide ne peut être qu'une *rotation* autour de AB. La droite AB se nomme l'*axe de rotation* : chacun des points du solide décrit un cercle autour de cette droite. Pour avoir une idée nette du mouvement, on

suppose un plan fixe ABC passant par l'axe de rotation, et un second plan ABH passant aussi par l'axe, mais lié au solide et tournant avec lui. La position de ce second plan déterminant évidemment celle du solide, il suffit de connaître en fonction du temps l'angle ψ que fait le plan mobile avec le plan fixe, pour connaître le mouvement du solide. La quantité (positive ou négative) dont croît l'angle ψ dans un temps donné, se nomme le *déplacement angulaire* du solide.

Soit $\Delta\psi$ le déplacement angulaire qu'éprouve le solide pendant un temps infiniment petit Δt, à partir d'un instant quelconque t. Si le rapport de $\Delta\psi$ à Δt est constant, quels que soient t et Δt, le mouvement de rotation est *uniforme*, et ce rapport se nomme la *vitesse angulaire de rotation*. Dans le cas général où ψ varie d'une manière quelconque avec t, on nomme *vitesse angulaire de rotation* à l'époque t, la limite du rapport $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro. On a donc, ω désignant la vitesse angulaire,

$$\omega = \lim \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{d\psi}{dt}.$$

Soit $MP = f$ la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque M du solide sur l'axe AB : à cause de la liaison invariable qui existe entre les points du solide, cette perpendiculaire décrit dans un temps infiniment petit Δt, un angle égal au déplacement angulaire $\Delta\psi$ du solide ; le point M décrit donc un arc égal à $f \cdot \Delta\psi$; la vitesse de ce point est donc

$$v = \lim f\frac{\Delta\psi}{\Delta t} = f\frac{d\psi}{dt} = f\omega.$$

La vitesse d'un point quelconque du solide est donc le produit de la vitesse angulaire au même instant par la distance du point à l'axe de rotation. La direction de cette vitesse est tangente au cercle que décrit le point M. Si la distance f est prise égale à l'unité, $v = \omega$, en sorte que *la vitesse angulaire d'un solide n'est autre chose que la vitesse d'un point de ce solide situé à l'unité de distance de l'axe de rotation.*

Pour figurer, par une simple droite, la direction de l'axe de rotation, la vitesse angulaire et le sens de la rotation, on porte sur l'axe, à partir d'un point fixe O, une longueur OR proportionnelle à la vitesse angulaire ω, et dans un sens tel, que la rotation s'effectue de la gauche vers la droite pour un observateur couché sur OR, les pieds en O, la tête en R. Deux rotations à vitesses égales, autour d'une même droite, en sens

contraire l'une de l'autre, seraient figurées par deux droites OR, OR' égales et directement opposées. Cette convention est de haute importance.

Dans un solide animé d'un mouvement quelconque, il peut se faire qu'à un instant donné les vitesses de tous les points du solide soient les mêmes, en grandeur et en direction, que si le solide tournait autour d'une certaine droite avec une certaine vitesse angulaire : on dit alors que le mouvement du solide est une *rotation instantanée*, et que la droite est un *axe instantané* de rotation.

17. Nous nous proposons d'exprimer les composantes rectangulaires v_x, v_y, v_z, de la vitesse v d'un point quelconque M du solide, en fonction de ses coordonnées x, y, z et des angles directeurs α, β, γ de l'axe de rotation. L'origine O étant en un point de l'axe, soient $\omega = \text{OR}$ la vitesse angulaire, $\partial = \text{OM}$ la distance du point M à l'origine, $f = \text{MP} = \partial \sin \text{MOR}$ son rayon de rotation. La direction MV de la vitesse du point M étant normale à OR et à MP, et par suite au plan MOR, on a les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\alpha\cdot v_x + \cos\beta\cdot v_y + \cos\gamma\cdot v_z = 0,\\ &x v_x + y v_y + z v_z = 0,\\ &v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \omega^2 f^2, \end{aligned}\right.$$

à cause de $v = \omega f$. Résolvant ces équations par rapport à v_x, v_y, v_z par la méthode connue, on aura

$$\frac{v_x}{z\cos\beta - y\cos\gamma} = \frac{v_y}{x\cos\gamma - z\cos\alpha} = \frac{v_z}{y\cos\alpha - x\cos\beta} = \pm\frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{(z\cos\beta - y\cos\gamma)^2 + \cdots}}$$

$$= \pm\frac{\omega f}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}}$$

$$= \pm\frac{\omega f}{\sqrt{\partial^2 - \partial^2\cos^2 \text{MOP}}} = \pm\frac{\omega f}{\partial \sin \text{MOP}} = \pm\,\omega.$$

Le double signe, qui dépend ici des deux directions opposées que peut avoir la vitesse v, va être déterminé par la convention faite sur le sens de la rotation indiquée par l'axe OR.

Menons un plan par OZ et par l'axe de rotation OR, soit $\text{R}_1\text{OR}'$ la trace de ce plan sur le plan XY. Soient θ, θ_1 les angles formés avec OX par les projections de OM et de OR sur le plan XY, ces angles étant comptés positivement de OX vers OY. Il est visible que le plan ZOR partage le solide entier en deux parties, dont l'une renferme tous les points qui

marchent actuellement vers le point culminant de leur trajectoire, et ont v_z positif; l'autre tous les points qui ont v_z négatif. De plus, par la convention faite sur le sens de la rotation par rapport à l'axe OR, on voit sans peine que la partie pour laquelle $v_z > 0$ comprend tous les points pour lesquels $\theta - \theta_1$ est compris entre o et π, celle pour laquelle $v_z < 0$ comprend tous les points pour lesquels $\theta - \theta_1$ est compris entre π et 2π. Donc, enfin, v_z est, pour un point quelconque du solide, de même signe que $\sin(\theta - \theta_1)$. Or, l'on a, ρ étant la projection de OM sur le plan XY,



$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad \cos\alpha = \sin\gamma\cos\theta_1, \quad \cos\beta = \sin\gamma\sin\theta_1,$$

d'où

$$y\cos\alpha - x\cos\beta = \rho\sin\gamma\sin(\theta - \theta_1),$$

quantité de même signe que $\sin(\theta - \theta_1)$, et conséquemment que v_z. Donc le rapport $v_z : y\cos\alpha - x\cos\beta$ est positif, et par suite, dans les équations ci-dessus, il faut prendre le signe supérieur devant ω pour rester d'accord avec notre convention sur le sens des rotations.

Nous avons donc ces formules importantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} v_x = \omega(z\cos\beta - y\cos\gamma), \\ v_y = \omega(x\cos\gamma - z\cos\alpha), \\ v_z = \omega(y\cos\alpha - x\cos\beta). \end{cases}$$

Mais $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ sont évidemment les composantes de l'axe OR parallèlement à OX, OY, OZ : en les désignant par p, q, r, nous aurons

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

et il viendra

$$(2) \qquad \begin{cases} v_x = qz - ry, \\ v_y = rx - pz, \\ v_z = py - qx, \end{cases}$$

équations qui fournissent la solution du problème.

Ces formules supposent que l'origine de l'axe OR coïncide avec l'origine des coordonnées : en supposant que le premier point soit placé en (x_1, y_1, z_1), ce qui revient, d'après les règles de la transformation des

coordonnées, à remplacer dans les équations (2) x, y, z par $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, on trouvera les équations plus générales

$$(3) \qquad \begin{cases} v_x = q(z - z_1) - r(y - y_1), \\ v_y = r(x - x_1) - p(z - z_1), \\ v_z = p(y - y_1) - q(x - x_1). \end{cases}$$

Si l'axe de rotation est parallèle à l'axe des z positifs, on a $p = 0$, $q = 0$, $r = \omega$, et les équations (2) et (3) se réduisent respectivement aux suivantes :

$$(4) \qquad v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0;$$

$$(5) \qquad v_x = -\omega(y - y_1), \quad v_y = \omega(x - x_1), \quad v_z = 0.$$

D'après la remarque faite à la fin du n° 16, les formules ci-dessus sont applicables, non seulement à une rotation *continue* autour d'un axe fixe, mais à une rotation *instantanée*.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE INVARIABLE DANS SON PLAN.

18. L'étude des *mouvements plans* est indispensable à celle du mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe ; elle conduit en outre à des conséquences géométriques remarquables et à des relations utiles dans la théorie des organes mécaniques. Nous allons d'abord traiter cette question.

Considérons un plan fixe, dans lequel se meut une figure plane et invariable, dont la forme est d'ailleurs arbitraire. Rapportons ce mouvement à deux axes rectangulaires fixes dans le plan, OX, OY ; A étant un point déterminé de la figure mobile, soient x_1, y_1 ses coordonnées, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$ sont les composantes de sa vitesse.



Concevons deux axes $A\xi$, $A\eta$ partant du point A qui se meuvent en restant parallèles à OX, OY, et prenons les pour système de comparaison. Le mouvement relatif de la figure par rapport à ce système ne peut être évidemment, qu'une

rotation simple autour du point A, avec une vitesse angulaire variable ω, que nous regarderons comme *positive* de $A\eta$ vers $A\xi$, et *négative* dans le sens inverse.

Soit donc M un point quelconque de la figure mobile, dont (x, y) sont les coordonnées par rapport à OX, OY; les composantes de la vitesse d'entraînement du point M parallèlement à ces mêmes axes sont évidemment

$$\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt};$$

les composantes de sa vitesse relative, d'après les formules (5) du chapitre précédent, sont

$$\omega(y - y_1), \quad -\omega(x - x_1) \text{ (1)};$$

donc, d'après la loi de composition des vitesses, les composantes v_x, v_y de sa vitesse absolue seront

$$v_x = \frac{dx_1}{dt} + \omega(y - y_1), \quad v_y = \frac{dy_1}{dt} - \omega(x - x_1).$$

Déterminons deux quantités α, β, *indépendantes de* x, y *et par suite du point* M que l'on considère, par les égalités

$$-\omega\beta = \frac{dx_1}{dt} - \omega y_1, \quad \omega\alpha = \frac{dy_1}{dt} + \omega x_1;$$

il viendra

$$(1) \qquad v_x = \omega(y - \beta), \quad v_y = -\omega(x - \alpha).$$

Ces valeurs, rapprochées des formules qui donnent les composantes de la vitesse d'un point dans la rotation autour d'un axe normal au plan XY, montrent que

Les vitesses des différents points de la figure mobile sont, à chaque instant, les mêmes en grandeur et en direction, que si cette figure tournait avec une vitesse angulaire ω, autour d'un certain point C du plan, déterminé par les coordonnées α, β.

Le point C de la figure a évidemment une vitesse nulle.

---

(1) Dans les formules rappelées la rotation avait lieu autour de l'axe des z positifs, donc de OX vers OY. Pour les appliquer au problème actuel, où les rotations positives ont lieu de OY vers OX, il faut évidemment y remplacer ω par $-\omega$.

Comme l'on a les équations

$$\alpha = x_1 + \frac{1}{\omega}\frac{dy_1}{dt}, \quad \beta = y_1 - \frac{1}{\omega}\frac{dx_1}{dt},$$

α, β sont en général des fonctions du temps. Le point C varie donc incessamment de position dans le plan, c'est pourquoi l'on donne à ce point remarquable le nom de *centre instantané de rotation*, et l'on dit pour abréger que le mouvement de la figure, à chaque instant, est une rotation autour du point C. Mais il importe de ne pas perdre de vue le sens exact de cet énoncé; en réalité, comme le point C est incessamment variable, il n'y a jamais de rotation proprement dite, mais les vitesses des divers points de la figure sont les mêmes, à un instant quelconque, que si celle-ci tournait effectivement autour du point C fixe avec une vitesse angulaire ω. Il suit de là que, pour un temps infiniment petit Δt, on peut calculer les quantités du premier ordre comme si la figure tournait d'un angle $\omega\Delta t$ autour du point C, mais on trouverait des résultats faux si l'on étendait cette fiction au calcul des quantités d'ordre supérieur.

19. *Conséquences.* — 1° *Les normales aux trajectoires que décrivent les différents points de la figure mobile, à un même instant, vont toutes concourir en un même point qui est le centre instantané correspondant à cet instant.* Car la vitesse d'un point M, et par suite la tangente à sa trajectoire, est évidemment normale au rayon de rotation CM. On arrive à cette même conséquence en éliminant ω entre les équations (1), ce qui donne

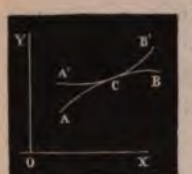
$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{dx}{dy} = -\frac{y-\beta}{x-\alpha}, \quad \text{ou} \quad y - \beta = -\frac{dx}{dy}(x-\alpha),$$

donc le point (α, β) est sur la normale à la courbe que décrit le point (x, y).

2° *La vitesse d'un point quelconque de la figure mobile est le produit de sa distance au centre instantané par la vitesse angulaire ω de la rotation instantanée, au même instant.* C'est une conséquence évidente de ce qui a été établi au n° 16 sur les vitesses des points d'un solide tournant autour d'une droite.

3° *La vitesse angulaire avec laquelle la figure tourne autour d'un de ses points est la même, au même instant, quel que soit ce point.* — Car la quantité ω, qui mesurait la vitesse angulaire de la rotation relative autour du point A, se trouve être la vitesse angulaire de la rotation instantanée autour du centre C : elle est donc indépendante du choix du point A dans la figure en mouvement.

20. Considérons le mouvement continu de la figure pendant un temps fini. Le centre instantané C étant variable, soit ACB la courbe qui est le lieu de ce point dans le plan fixe XOY. D'autre part, ce centre se déplace aussi par rapport à la figure mobile, et le lieu des positions qu'il vient occuper successivement dans cette figure est une certaine ligne, sa trajectoire relative : soit A'CB' la position de cette trajectoire à l'instant considéré. Concevons maintenant un point mobile qui coïncide à chaque instant avec le centre instantané C : sa vitesse absolue est celle qu'il possède par rapport à XOY, ou sur la ligne ACB; sa vitesse relative, celle avec laquelle il parcourt la courbe A'CB' sur la figure mobile; enfin, sa vitesse d'entraînement est nulle à chaque instant, puisque le point C de la figure mobile a une vitesse nulle.



Donc la vitesse absolue et la vitesse relative de ce point C coïncident en grandeur et en direction; d'où il suit : 1° que les courbes ACB, A'CB' ont même tangente au point commun C; 2° que le point mobile parcourt sur sa trajectoire absolue ACB et sur sa trajectoire relative A'CB', dans un même intervalle de temps, des arcs rigoureusement égaux, donc les arcs compris sur ces deux courbes, entre les points qui viennent successivement coïncider deux à deux, sont égaux, ce qui caractérise le *roulement* d'une courbe sur une autre sans *glissement*. D'où ce beau théorème :

Le mouvement continu d'une figure plane dans son plan, quel qu'il soit, peut toujours être réalisé en faisant rouler, sur une courbe fixe dans le plan, une courbe invariablement liée à la figure mobile. La première est le lieu du centre instantané de rotation dans le plan, la seconde est le lieu de ce point dans la figure : le point de contact de ces courbes, à un instant donné, est le centre instantané pour cet instant.

21. *Application à la construction des normales aux courbes.* — Quand les conditions géométriques qui définissent le mouvement de la figure invariable sont données, on en déduit la construction du centre instantané pour une position donnée de la figure, et par suite (**19**, 1°) la normale à la trajectoire d'un point quelconque de la figure. Toute ligne qui peut être décrite par un point d'une figure invariable qui se meut suivant une loi connue, donne donc lieu à une construction facile de la normale.

Les conditions qui définissent le déplacement de la figure sont d'ordinaire les suivantes : 1° *Une ligne A'CB' de la figure roule sur une ligne*

fixe ACB. Le centre instantané est immédiatement connu : c'est le point de contact C des deux lignes. — Tel est le cas de la cycloïde : elle est décrite par un point M de la circonférence, ou, plus généralement, *du plan* d'un cercle qui roule sur une droite fixe OX. La normale à cette courbe s'obtient donc en joignant le point générateur M au point de contact C, théorème connu.

2° *Deux points déterminés* A *et* B *de la figure sont assujettis à parcourir deux lignes données*, PQ, RS; les normales à ces courbes, respectivement, en A et B, se coupent évidemment au centre instantané C correspondant à la position actuelle de la figure. Ce point connu, on applique la construction.

3° *Une ligne* PQ, *faisant partie de la figure mobile, doit toucher constamment une ligne* RS, *fixe dans le plan.* — Concevons un point mobile M qui coïncide à chaque instant avec le point de contact des deux courbes PQ, RS : sa vitesse absolue MV est tangente à la courbe fixe RS; sa vitesse relative MV′ par rapport à la figure mobile, est tangente à PQ qui est sa trajectoire relative. Ces deux vitesses étant, par condition, dirigées suivant une même droite (dans le même sens ou non), la vitesse d'entraînement MV″ est aussi dirigée suivant cette droite. Ce qui nous apprend que le point de la figure mobile actuellement en M a sa vitesse dirigée suivant la tangente MV ; donc, en vertu du théorème fondamental (**19**, 1°), *la normale commune aux courbes* PQ, RS, *menée par leur point de contact actuel* M, *va passer par le centre instantané correspondant* C. Une autre condition sera nécessaire pour achever de déterminer C.



Le cas du roulement de PQ sur RS est celui où les vitesses MV, MV′ sont égales et de même sens : la vitesse d'entraînement est alors nulle.

Il suit encore du théorème précédent que, si une courbe PQ se meut dans le plan, l'enveloppe des positions successives de cette courbe peut être regardée comme une ligne fixe RS à laquelle elle reste toujours tangente. Le point où la ligne mobile, dans une de ses positions, touche son enveloppe, s'obtiendra donc en abaissant du centre instantané correspondant, déterminé par les conditions qui règlent le mouvement de la ligne PQ, une normale à celle-ci.

4° *Une ligne* PQ *invariablement liée à la figure mobile, est assujettie à passer toujours par un point fixe* A *du plan.* Cas particulier du précé-

dent : la courbe RS se réduit au point A. La normale à PQ menée par le point A, dans une position donnée de la figure, passera par le centre instantané de rotation correspondant à cette position. Un raisonnement direct conduit à la même conclusion.

22. *Exemples.* — 1° Une droite AB, de longueur constante, glisse par ses extrémités sur deux droites données OX, OY. Un point M de cette droite décrit, comme on sait, une ellipse. On demande le centre instantané, la normale à l'ellipse, la courbe fixe et la courbe roulante, etc.

Un point A de la figure mobile décrivant la droite OX, la perpendiculaire à OX menée par le point A doit passer par le centre instantané C; de même pour la normale à OY menée par le point B. Le point C est donc déterminé, et la droite CM est la normale à l'ellipse que décrit le point M.

Dans le quadrilatère OACB, les angles A et B sont droits, l'angle O est constant, donc aussi l'angle ACB, et puisque AB est de longueur constante, si l'on décrit sur cette corde le segment capable de l'angle ACB, on aura un cercle passant par le point O et qui est le lieu du centre instantané sur la figure mobile, ou la courbe roulante. OC est le diamètre de ce cercle; O′, milieu de OC, son centre. La distance OC étant constante, il est clair que C décrit, dans le plan fixe, un cercle de rayon OC et de centre O : c'est la courbe fixe. Le mouvement de la droite AB sur ses directrices peut donc être réalisé en faisant rouler intérieurement un cercle sur un cercle de rayon double. L'ellipse est donc une *hypocycloïde* — On observera que dans ce mouvement chaque point situé sur la circonférence du cercle roulant décrit une droite passant par le centre du cercle fixe.



2° *Podaire d'une courbe donnée* RS *par rapport à un point fixe* O. — On peut la concevoir comme engendrée par le sommet M_1 d'un angle droit OM_1M, dont un côté MM_1 touche la ligne RS en M, l'autre côté passant constamment par le point fixe O. D'après ce qui précède, les normales à ces côtés M_1M et M_1O, menées respectivement par le point de contact M et par le point fixe O, se coupent au centre instantané C. La droite CM_1 est donc la normale cherchée à la podaire. On voit par le rectangle



CMM_1O que CM_1 passe par le milieu de la droite OM, ce qui ramène à la construction connue (1).

3° Une droite de longueur constante AB s'appuie par ses extrémités sur deux circonférences O et O'.

Le centre instantané C est au point de concours des rayons OA, O'B prolongés; CM est la normale à la trajectoire d'un point M de la droite AB.



Les vitesses des points A et B sont entr'elles comme les distances de ces points au point C, donc dans le rapport

$$\frac{CA}{CB}=\frac{\sin CBA}{\sin CAB}.$$

Mais si ω, ω' désignent les vitesses angulaires des rayons OA et O'B autour de leurs centres respectifs, les vitesses des points A et B sont $\omega\cdot OA$ et $\omega'\cdot O'B$, donc

$$\frac{\omega\cdot OA}{\omega'\cdot O'B}=\frac{\sin CBA}{\sin CAB},\quad \frac{\omega}{\omega'}=\frac{O'B\sin CBA}{OA\sin CAB}.$$

Les vitesses ω et ω' sont donc en raison inverse des perpendiculaires abaissées des centres O et O' sur la droite mobile. Et les triangles semblables montrant que ces perpendiculaires sont entr'elles comme les segments OD, O'D, on a

$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{O'D}{OD},$$

c'est-à-dire que *les vitesses angulaires des rayons* OA, O'B *autour de leurs pivots respectifs sont en raison inverse des segments que fait la droite mobile* AB *sur la droite* OO' *qui joint ces pivots.*

Exercices.

1. On donne les vitesses de deux points A et B de la figure (en grandeur seulement), et l'angle qu'elles forment entr'elles. Trouver la vitesse angulaire de la rotation ω, et le centre instantané C.

---

(1) Cours d'An., p. 168.

R. On cherchera la vitesse relative du point B autour du point A, ce qui donnera ω, d'où l'on déduira les distances AC, BC.

2. *Normale à la conchoïde* (chap II, ex. 2). — *R.* BC normale à la droite AX que parcourt le point B, OC normale à la droite mobile OBM qui passe par le point fixe O, se coupent au centre instantané C. MC est la normale à la conchoïde en M. Le lieu du point C dans le plan fixe est une parabole ayant pour sommet O et pour axe une perpendiculaire à AX; dans la figure mobile, le lieu du point C est une courbe dont l'équation polaire est de la forme



$$r \cos^2 \theta = a.$$

3. L'enveloppe des tangentes aux trajectoires que décrivent, à un même instant, les divers points d'une droite mobile, est une parabole dont le foyer est au centre instantané actuel et le sommet à la projection de ce centre sur la droite mobile.

4. Une droite de longueur constante AB; le point A parcourt un cercle fixe O, le point B une droite OX passant par le centre du cercle. Trouver 1° la normale à la trajectoire d'un point M de la droite mobile; 2° l'équation de cette trajectoire; 3° le lieu du centre instantané, dans le plan et dans la figure mobile.

R. Soient a le rayon du cercle, δ la longueur AB; l'équation polaire de la courbe fixe rapportée à O et à OX est

$$r^2 - 2\,ar \cos^2 \theta + a^2 - \delta^2 = 0\,;$$

l'équation polaire de la courbe roulante, rapportée au pôle A et à l'axe polaire AB, est

$$\delta^2 (r - a)^2 \sin^2 \theta = (\delta^2 - a^2)(r^2 - \delta^2).$$

Soit m la distance du point M au milieu de AB; le lieu du point M, rapporté à OX, OY, a pour équation

$$\left(\frac{\delta}{2} - m\right) x = \left(\frac{\delta}{2} + m\right) \sqrt{\left(\frac{\delta}{2} - m\right)^2 + y^2} + \sqrt{a^2 \left(\frac{\delta}{2} - m\right)^2 - \delta^2 y^2}.$$

5. Une courbe PQ glisse par un de ses points M sur une courbe fixe RS : chercher le centre instantané de rotation pour une position donnée de PQ, et montrer que la normale en M à la ligne PQ roule sur la développée de la courbe RS. Si, au contraire, le point M de contact était un point donné de la courbe RS, la développée de la courbe PQ roulerait sur la normale à la courbe RS en M.

CHAPITRE V.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE 1° PARALLÈLEMENT A UN PLAN FIXE; 2° AUTOUR D'UN POINT FIXE.

23. *Mouvement parallèle à un plan fixe.* — Soit un solide quelconque S et un plan fixe MN; un point A du solide décrit une trajectoire AA′ plane et parallèle au plan MN; une droite AB du solide, normale au plan, reste constamment parallèle à elle-même.

Il suit des principes de la géométrie 1° que le point B du solide décrira une courbe plane BB′, parallèle à MN, parfaitement égale à AA′; 2° que ces deux points A, B auront à chaque instant des vitesses égales et parallèles, et qu'il en sera de même pour tout autre point du solide, situé sur la droite AB; 3° que tout autre point C du solide, étant à des distances invariables de A et B, ne peut se mouvoir que dans un plan parallèle au plan MN; 4° qu'enfin, deux points quelconques du solide situés sur une même perpendiculaire au plan MN, ont à chaque instant des vitesses égales et parallèles et décrivent des trajectoires égales.

Le mouvement du solide, ainsi défini, est dit *parallèle au plan fixe* MN.

Il suit évidemment des propriétés précédentes que le mouvement d'un point du solide fait connaître le mouvement de tous les points situés sur une droite normale au plan MN; donc, si l'on connaît le mouvement de la section faite dans le solide par le plan MN (ou par un plan parallèle à MN), on connaîtra entièrement le mouvement du solide. On voit donc que *le mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe se ramène au mouvement d'une figure plane sur son plan*, et qu'il nous suffira d'appliquer ici les propriétés développées au chapitre IV.



Soit C le centre instantané de rotation de la section plane, à une époque quelconque, CZ une normale au plan MN; tout point du solide situé sur CZ a une vitesse actuelle nulle, et tout point du solide a la même vitesse, en grandeur et en direction, que si le solide tournait actuellement autour de CZ avec une certaine vitesse angulaire. Ainsi le mouvement du solide est une rotation instantanée, et CZ est l'*axe instantané* de rotation.

Soient ACB la courbe fixe, A'CB' la courbe roulante dont le mouvement sur ACB réalise le déplacement de la section plane dans son plan. Le lieu de l'axe instantané de rotation dans l'espace est évidemment la surface cylindrique qui a pour base ACB et pour génératrice CZ; de même, le lieu de l'axe instantané dans le solide est la surface cylindrique dont A'CB' est la base, CZ la génératrice. Concevons que ce second cylindre soit lié au solide et se meuve avec lui : il est clair 1° qu'à chaque instant les cylindres AZCB, A'ZCB' se touchent tout le long de la génératrice commune CZ, c'est-à-dire de l'axe actuel de rotation; 2° que, les courbes A'CB', ACB ne faisant que *rouler* l'une sur l'autre, il en est de même pour les sections planes faites par un plan quelconque parallèle à MN dans les deux cylindres; donc *la surface cylindrique qui est le lieu de l'axe instantané dans le solide ne fait que rouler, sans glissement, sur la surface cylindrique qui est le lieu de l'axe instantané dans l'espace.*

Nous exprimerons cette propriété remarquable en disant que *le mouvement le plus général d'un solide parallèlement à un plan fixe est un roulement cylindrique.*

24. *Mouvement autour d'un point fixe.* — Pour étudier analytiquement le mouvement d'un solide fixé par un point O, nous concevons trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ, passant par ce point, et trois axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ liés au solide et emportés dans son mouvement, de sorte que leur position à un instant quelconque suffit pour déterminer celle du solide. Soient, comme au Ch. II, $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ les neuf cosinus directeurs des trois axes mobiles par rapport à chacun des axes fixes, à l'époque t; x, y, z les coordonnées par rapport à OXYZ d'un point quelconque M du solide; ξ, η, ζ ses coordonnées *invariables* par rapport au système mobile $O\xi\eta\zeta$. Nous avons donc les relations connues



$$(1)\quad \begin{cases} x = a\xi + b\eta + c\zeta, \\ y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ ab + a'b' + a''b'' = 0, \end{cases}$$

Les dérivées, par rapport au temps, des coordonnées x, y, z nous donnent les composantes de la vitesse du point M, parallèlement à OX, OY, OZ :

$$(4)\quad \begin{cases} v_x = \xi \dfrac{da}{dt} + \eta \dfrac{db}{dt} + \zeta \dfrac{dc}{dt}, \\ v_y = \xi \dfrac{da'}{dt} + \eta \dfrac{db'}{dt} + \zeta \dfrac{dc'}{dt}, \\ v_z = \xi \dfrac{da''}{dt} + \eta \dfrac{db''}{dt} + \zeta \dfrac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Pour les composantes v_ξ, v_η, v_ζ de cette vitesse parallèlement aux axes mobiles Oξ, Oη, Oζ dans leur position actuelle, nous aurons, d'après le théorème des projections,

$$(5)\quad \begin{cases} v_\xi = av_x + a'v_y + a''v_z, \\ v_\eta = bv_x + b'v_y + b''v_z, \\ v_\zeta = cv_x + c'v_y + c''v_z. \end{cases}$$

Mais les équations (2) et (3), différentiées, nous donnent

$$(6)\quad \begin{cases} a\dfrac{da}{dt} + a'\dfrac{da'}{dt} + a''\dfrac{da''}{dt} = 0, \\ b\dfrac{db}{dt} + b'\dfrac{db'}{dt} + b''\dfrac{db''}{dt} = 0, \\ c\dfrac{dc}{dt} + c'\dfrac{dc'}{dt} + c''\dfrac{dc''}{dt} = 0, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} c\dfrac{db}{dt} + c'\dfrac{db'}{dt} + c''\dfrac{db''}{dt} = -\left(b\dfrac{dc}{dt} + b'\dfrac{dc'}{dt} + b''\dfrac{dc''}{dt}\right) = p, \\ a\dfrac{dc}{dt} + a'\dfrac{dc'}{dt} + a''\dfrac{dc''}{dt} = -\left(c\dfrac{da}{dt} + c'\dfrac{da'}{dt} + c''\dfrac{da''}{dt}\right) = q, \\ b\dfrac{da}{dt} + b'\dfrac{da'}{dt} + b''\dfrac{da''}{dt} = -\left(a\dfrac{db}{dt} + a'\dfrac{db'}{dt} + a''\dfrac{db''}{dt}\right) = r, \end{cases}$$

p, q, r désignant donc des quantités qui dépendent seulement du mouvement des axes mobiles. Portant dans les équations (5) les valeurs (4) de v_x, v_y, v_z et ayant égard aux formules (6) et (7), on trouvera

$$(8)\quad \begin{cases} v_\xi = q\zeta - r\eta, \\ v_\eta = r\xi - p\zeta, \\ v_\zeta = p\eta - q\xi. \end{cases}$$

Or, si nous rapprochons ces valeurs de v_ξ, v_η, v_ζ des équations (2) du N° 17, nous en concluons immédiatement que *les vitesses de tous les points du solide à un instant quelconque sont les mêmes, en grandeur et en direction, que si le solide tournait actuellement autour d'un axe* OR *passant par le point fixe et ayant pour projections respectives sur les axes* $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, *les quantités* p, q, r, définies par les relations (7).

Le mouvement du solide à chaque instant est donc une rotation instantanée, et OR est l'*axe instantané* de rotation. Les cosinus directeurs de cet axe rapporté à $O\xi\eta\zeta$, et la vitesse angulaire ω de la rotation instantanée, sont donnés par les formules

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}, \quad \cos\alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{r}{\omega}.$$

Les équations (8) font voir d'ailleurs que tout point du solide situé sur la droite dont les équations sont

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r},$$

a actuellement une vitesse nulle.

25. L'axe instantané varie incessamment de grandeur et de direction, puisque p, q, r sont des fonctions du temps. Le lieu de l'axe OR par rapport au système fixe OXYZ est donc une surface conique OARB dont O est le sommet. D'autre part, cet axe se déplace dans l'intérieur du solide, et décrit par rapport au système $O\xi\eta\zeta$ une autre surface conique : soit OA'RB' cette surface dans la position qu'elle occupe actuellement, OR étant l'axe instantané ou la génératrice commune aux deux cônes. Si l'on coupe ces deux surfaces par une sphère de centre O et de rayon quelconque, on démontrera, par un raisonnement déjà employé dans l'étude des mouvements plans, que la section A'RB' du cône mobile roule, sans glisser, sur la section ARB du cône fixe. Il suit évidemment de là 1° que les surfaces coniques OARB, OA'RB' ont même plan tangent tout le long de la génératrice commune OR; 2° que les portions de ces surfaces coniques, comprises entre les génératrices qui viennent successivement coïncider deux-à-deux, sont égales; en d'autres termes, que le cône OA'RB' *roule* simplement sur le cône OARB. D'où ce théorème général, qui fournit une idée nette du mouvement :

Le mouvement le plus général d'un solide autour d'un point fixe O *est réalisé en faisant rouler un cône, lié au solide, sur un cône fixe de*

même sommet O; *le second de ces cônes étant le lieu de l'axe instantané de rotation dans l'espace; le premier, le lieu de cet axe dans le solide même.*

Les composantes p, q, r de l'axe instantané, qui sont données par les formules (7) en fonction des quantités a, b, c,... dont dépend le mouvement des axes mobiles, jouissent de propriétés remarquables que nous étudierons plus loin.

Exercices.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \qquad \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, \qquad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q,$$

$$\frac{db}{dt} = cp - ar, \qquad \frac{db'}{dt} = c'p - a'r, \qquad \frac{db''}{dt} = c''p - a''r,$$

$$\frac{dc}{dt} = aq - bp, \qquad \frac{dc'}{dt} = a'q - b'p, \qquad \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p.$$

R. On comparera les valeurs de v_x, v_y, v_z des équations (4), avec celles que l'on déduit des équations (8) et du théorème des projections.

2. Démontrer que l'axe instantané de rotation OR ne peut occuper une position invariable dans le solide, sans être également fixe dans l'espace.

3. Un solide, fixé par un point O, se meut de telle manière que deux de ses droites, OA et OB, comprenant un angle droit, se meuvent respectivement dans deux plans fixes OO'X, OO'Y ; on connait la vitesse angulaire ε de la droite OA dans le plan OO'X à l'époque t. On demande de déterminer l'axe instantanée OR, la vitesse angulaire ε' de la droite OB dans le plan OO'Y et la vitesse angulaire ω de la rotation instantanée, au même instant.



R. Soient λ l'angle des deux plans fixes ; α et β les angles O'OA, O'OB, de sorte que

$$\varepsilon = \frac{d\alpha}{dt}, \qquad \varepsilon' = \frac{d\beta}{dt}.$$

L'axe instantané est l'intersection de deux plans, respectivement normaux à OO'X, OO'Y suivant OA et OB. On a

$$tg\,\alpha\, tg\,\beta = -\frac{1}{\cos\lambda}, \qquad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos\lambda}{\cos^2\alpha + \cos^2\lambda \sin^2\alpha},$$

$$\omega = \varepsilon\sqrt{\frac{1 - \sin^2\lambda \sin^2\alpha \sin^2\beta}{1 - \sin^2\lambda \sin^2\alpha}}.$$

4. Soient, dans le mouvement autour d'un point fixe, θ la vitesse angulaire avec laquelle l'axe instantané se déplace dans l'espace; r, ρ les rayons de courbure des sections faites normalement à l'axe instantané dans le cône fixe et le cône roulant, à l'unité de distance de l'axe. On a

$$\omega = \theta\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right).$$

CHAPITRE VI.

DE LA RÉDUCTION DES MOUVEMENTS D'UN SOLIDE, ET DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE ENTIÈREMENT LIBRE.

26. *Réduction des mouvements de translation.* — Soit un solide S animé *simultanément* de plusieurs mouvements de translation, dans le sens attaché à cette expression, savoir, que le solide a un mouvement de translation par rapport à un système invariable $O'\xi\eta\zeta$ qui a lui-même un mouvement de translation par rapport à un deuxième système OXYZ, et ainsi de suite. D'après la règle de la composition des vitesses dans les mouvements relatifs (**13**), la vitesse absolue ou totale MV d'un point quelconque M du solide sera la résultante de sa vitesse relative MV' par rapport au système $O'\xi\eta\zeta$, de sa vitesse d'entraînement MV'' due au mouvement de ce premier système par rapport au second, et ainsi de suite. Mais pour tout autre point M' du solide, en vertu de la définition même d'un mouvement de translation, la vitesse relative sera égale et parallèle à MV', la première vitesse d'entraînement à MV'', etc.; toutes ses vitesses composantes seront respectivement égales et parallèles à celles du point M, et il en sera de même de sa vitesse totale. Donc tous les points du solide ont, à un même instant, dans le mouvement absolu, des vitesses égales et *le mouvement du solide est une translation,* dont la vitesse est déterminée en grandeur et en direction par celle d'un point quelconque M, c'est-à-dire par la construction indiquée. D'où ce théorème :

Quand un solide est animé à la fois de plusieurs translations, son mouvement total est une translation, et l'on obtient, à chaque instant, la vitesse de cette translation, en portant à partir d'un point arbitraire M

des droites représentant les vitesses correspondantes à chacune des translations relatives dont le solide est animé, et en construisant leur résultante.

Il est clair que cette règle s'applique également au cas où les mouvements composants seraient des *translations instantanées*.

27. *Réduction des rotations autour d'axes concourants.* — Soit d'abord un solide S animé de deux rotations simultanées autour de deux axes se coupant en un point O, en sorte que son mouvement relatif à $O\xi\eta\zeta$ est une rotation représentée par l'axe OP (**16**), le mouvement de $O\xi\eta\zeta$ étant une rotation représentée par l'axe OP'.



Soient, parallèlement à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, p, q, r les composantes de l'axe OP; p', q', r' celles de l'axe OP'; x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M du solide. D'après les formules (2) du chapitre III, les composantes parallèles à OX, OY, OZ de la vitesse relative du point M sont

$$qz - ry, \quad rx - pz, \quad py - qx;$$

celles de sa vitesse d'entraînement

$$q'z - r'y, \quad r'x - p'z, \quad p'y - q'x;$$

donc, les composantes de sa vitesse absolue sont

$$(q+q')z - (r+r')y, \ (r+r')x - (p+p')z, \ (p+p')y - (q+q')x.$$

Ces expressions, en vertu des mêmes formules, font voir que le solide tourne actuellement autour d'un axe OR passant par O, et dont les composantes suivant OX, OY, OZ sont respectivement $p+p'$, $q+q'$, $r+r'$; d'où il suit (**3**) que OR est la résultante de OP, OP'.

D'où ce théorème : *Quand un solide est animé de deux rotations simultanées autour de deux axes passant par un même point* O, *son mouvement est une rotation autour d'un troisième axe passant par ce point : et si l'on mène, à partir du point* O, *les axes représentatifs* OP, OP' *des rotations simultanées, la diagonale du parallélogramme construit sur* OP, OP' *sera l'axe représentatif de la rotation totale.*

Cette règle constitue le *parallélogramme des rotations :* comme il ne s'agit toujours que des vitesses dont les points du solide sont animés, elle s'applique aussi bien à des rotations instantanées qu'à des rotations continues.

28. Il suit évidemment de la règle précédente que des rotations simultanées en nombre quelconque, dont les axes partent d'un même point, se réduisent à une rotation unique dont l'axe représentatif est la résultante des axes représentatifs des rotations données. En particulier, si le solide tourne simultanément autour de trois axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ se coupant à angles droits, avec les vitesses angulaires respectives p, q, r (que l'on affecte du signe + ou du signe — suivant le sens dans lequel chaque axe de rotation est dirigé à partir de O), le mouvement total du solide se réduira à une rotation instantanée autour de la diagonale OR du parallélipipède construit sur les axes de ces rotations p, q, r. Donc, les angles α, β, γ que fait OR avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, et la vitesse angulaire ω de la rotation instantanée, seront donnés par les formules

$$p = \omega \cos\alpha, \quad q = \omega \cos\beta, \quad r = \omega \cos\gamma,$$
$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Cette remarque fournit une nouvelle interprétation des quantités p, q, r que nous avons introduites dans la théorie de la rotation autour d'un point fixe. On voit qu'elles représentent les vitesses des trois rotations simultanées qu'il faudrait imprimer au solide, autour des axes mobiles $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, à un instant quelconque, pour lui donner la rotation instantanée OR dont il est animé à la même époque.

Réciproquement, toute rotation instantanée ou continue autour d'un axe quelconque OR pourra être remplacée par trois rotations simultanées p, q, r autour de trois axes rectangulaires de même origine que le premier; et les axes représentatifs de ces rotations relatives se déterminent, soit par la construction du parallélipipède, soit par les formules ci-dessus qui donnent p, q, r en fonction de ω, α, β, γ.

29. La théorie de la composition des rotations conduit à exprimer les composantes p, q, r de l'axe instantané OR, dans la rotation autour d'un point fixe, non plus au moyen de neuf fonctions a, b, c,.. du temps liées entr'elles par six équations, mais au moyen de trois angles seulement, qui suffisent pour définir la position des axes mobiles par rapport aux axes fixes. Soit OX_1 la trace du



plan $\xi\eta$ sur le plan XY, $\psi = XOX_1$ l'angle compris entre cette trace et l'axe OX; $\varphi = X_1O\xi$ l'angle entre cette trace OX_1, et l'axe $O\xi$ dans le

plan $\xi\eta$; $\theta = ZO\zeta$ l'angle compris entre les axes *positifs* OZ, $O\zeta$. La trace OX_1 normale au plan $ZO\zeta$, est menée du côté de ce plan où la rotation de OZ vers $O\zeta$ aurait lieu de la gauche vers la droite ; l'angle ψ est compté à partir de OX, positivement dans le sens de OX vers OY, de 0° à 360° ; l'angle φ est compté à partir de OX_1 dans le sens de $O\xi$ vers $O\eta$, de zéro à 360°. Il est clair que la connaissance des angles θ, ψ, φ suffit pour déterminer complétement la situation du système $O\xi\eta\zeta$ et par suite celle du solide : on peut donc exprimer p, q, r en fonction des angles θ, ψ, φ et de leurs dérivées par rapport au temps.

Pendant un temps infiniment petit dt, le système $O\xi\eta\zeta$ éprouve un déplacement infiniment petit, et les angles θ, ψ, φ varient de quantités infiniment petites $d\theta$, $d\psi$, $d\varphi$. Or, on peut produire ces variations, et par conséquent amener le système $O\xi\eta\zeta$ dans sa nouvelle position, par trois rotations simultanées, en faisant tourner ce système d'un angle égal à $d\psi$ autour de l'axe OZ, en même temps que le plan $\xi\eta$ tourne autour de OX_1 d'un angle égal à $d\theta$, et que, dans ce plan $\xi\eta$, les axes $O\xi$, $O\eta$ tournent autour de $O\zeta$ d'un angle égal à $d\varphi$. On voit par là, évidemment, que le déplacement infiniment petit total du solide, et par suite les vitesses de ses différents points à l'instant t que l'on considère, sont les mêmes que si le solide tournait simultanément autour des trois axes OZ, OX_1, $O\zeta$, avec les vitesses angulaires respectives $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, dans le sens indiqué par les signes de ces dérivées. Donc, si l'on compose ces trois rotations instantanées, on retrouvera en grandeur et en direction l'axe instantané de rotation OR, dont les projections sur $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sont p, q, r. Donc, en appliquant le premier théorème sur les résultantes, on aura

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{d\psi}{dt}\cos(\xi,Z) + \frac{d\theta}{dt}\cos(\xi,X_1) + \frac{d\varphi}{dt}\cos(\xi,\zeta);\\ q &= \frac{d\psi}{dt}\cos(\eta,Z) + \frac{d\theta}{dt}\cos(\eta,X_1) + \frac{d\varphi}{dt}\cos(\eta,\zeta);\\ r &= \frac{d\psi}{dt}\cos(\zeta,Z) + \frac{d\theta}{dt}\cos(\zeta,X_1) + \frac{d\varphi}{dt}\cos(\zeta,\zeta). \end{aligned}\right.$$

On a évidemment

$$\cos(\xi,X_1) = \cos\varphi,\quad \cos(\eta,X_1) = -\sin\varphi,\quad \cos(\zeta,X_1) = 0,$$
$$\cos(\xi,\zeta) = 0,\quad \cos(\eta,\zeta) = 0,\quad \cos(\zeta,\zeta) = 1;$$

de plus, dans le système $O\xi\eta\zeta$, la droite OZ faisant avec $O\zeta$ un angle θ,

et le plan ZOζ avec ξOζ un angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$, les cosinus directeurs de OZ sont

$$\cos(\xi, Z) = \sin\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\theta \sin\varphi,$$

$$\cos(\eta, Z) = \sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\theta \cos\varphi,$$

$$\cos(\zeta, Z) = \cos\theta;$$

donc enfin,

$$(\text{A}) \qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ q &= \sin\theta \cos\varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules importantes, dont nous ferons usage par la suite, s'obtiennent également en exprimant les cosinus a, b, c, ... en fonction des angles θ, ψ, φ par la trigonométrie sphérique, et en substituant leurs valeurs dans les formules (7) du chapitre précédent.

30. *Réduction des rotations autour d'axes parallèles.* — Supposons maintenant qu'un solide soit animé de deux rotations simultanées, dans le même sens, autour de deux axes parallèles, avec des vitesses angulaires ω, ω'. Prenons l'un de ces axes pour axe des z positifs, le plan ZOX passant par l'autre, et soient OP $= \omega$, O'P' $= \omega'$ les axes représentatifs de ces deux rotations, OO' $= \delta$ la distance des deux axes. Les composantes parallèles à OX, OY, OZ de la vitesse d'un point (x, y, z) du solide, due à la rotation OP, sont comme on l'a vu (**17**),



$$-\omega y, \quad \omega x, \quad 0;$$

celles de la vitesse due à la rotation O'P'

$$-\omega' y, \quad \omega'(x - \delta), \quad 0;$$

donc, celles de la vitesse totale sont

$$(1) \qquad v_x = -(\omega + \omega')\,y, \quad v_y = (\omega + \omega')\,x - \omega'\delta, \quad v_z = 0,$$

et si l'on détermine une quantité α par l'équation

$$(2) \qquad \omega'\delta = (\omega + \omega')\,\alpha,$$

leurs valeurs deviennent

$$(3) \qquad v_x = -(\omega + \omega')\,y, \quad v_y = (\omega + \omega')(x - \alpha), \quad v_z = 0.$$

Ces équations (3), comparées à celles du N° **17** qui donnent les composantes de la vitesse dans une rotation autour d'un axe parallèle à l'axe des z, montrent que le mouvement absolu du solide est une rotation autour d'un axe AR parallèle aux deux premiers, coupant l'axe OX en un point A pour lequel $y = 0$, $x = \alpha$, rotation dont la vitesse angulaire $\omega_1 = \omega + \omega'$ est de même sens que les rotations composantes. On a d'ailleurs, par l'équation (2),

$$(4) \qquad \frac{\alpha}{\omega'} = \frac{\delta}{\omega + \omega'} = \frac{\delta - \alpha}{\omega},$$

ou

$$\frac{OA}{O'P'} = \frac{O'A}{OP} = \frac{OO'}{AR},$$

ce qui montre que chacun des segments OA, O'A, OO' compris sur la perpendiculaire OX entre deux des axes de rotation, est proportionnel au troisième axe.

Si la rotation autour de O'P' était de sens contraire à celle autour de OP, on déterminerait par un calcul semblable l'axe de la rotation absolue, mais il est plus simple de ramener ce cas au premier par la convention suivante. Observons que si le sens d'une des rotations OP, O'P', AR vient à changer, les composantes de la vitesse d'un point quelconque M due à cette rotation ne font que changer de signe, ce qui revient, d'après les expressions données plus haut de ces composantes, à changer le signe de la vitesse angulaire ω, ω', ω_1 autour de cet axe. Mais comme en même temps, d'après la convention établie pour la représentation du sens d'une rotation (**16**), la direction de l'axe correspondant à cette rotation se change dans la direction opposée, on voit qu'il suffit d'attribuer à chaque vitesse angulaire le signe conforme à la direction de l'axe de rotation correspondant par rapport à l'axe des z positifs. Cette règle admise, il est visible que le calcul ci-dessus s'applique à tous les cas : la vitesse ω_1 sera toujours égale à la somme algébrique $\omega + \omega'$ des vitesses composantes, et le signe + ou — dont elle sera affectée déterminera la direction positive

ou négative de l'axe AR, c'est-à-dire le sens de la rotation; α pourra être positif ou négatif, et son signe déterminera la position du point A sur OO' ou sur son prolongement. Enfin, les équations (4), subsistant dans tous les cas, feront voir que les segments OA, O'A, OO' sont toujours proportionnels aux axes O'P', OP, AR. De là ce théorème général :

Deux rotations simultanées d'un solide autour de deux axes parallèles se réduisent à une rotation unique autour d'un troisième axe, parallèle aux premiers et situé dans le même plan. La vitesse angulaire de cette rotation résultante est égale à la somme algébrique des vitesses angulaires des rotations composantes, et le signe dont elle est affectée indique le sens dans lequel elle s'effectue. Enfin, la longueur de l'axe représentatif de chacune de ces rotations est proportionnelle au segment compris, sur une perpendiculaire aux trois axes, entre les directions des deux autres.

Tout est ainsi déterminé concernant la rotation totale AR. La réduction d'un nombre quelconque de rotations autour d'axes parallèles se fera maintenant sans difficulté : après avoir déduit, de la règle précédente, l'axe de la rotation équivalente à deux des rotations données, on composera cette rotation avec une troisième par la même règle, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait ramené toutes les rotations à une seule.

31. Le problème traité ci-dessus présente un cas d'exception remarquable, celui où les axes OP, O'P' sont égaux et dirigés en sens contraire, en sorte que

$$\omega' = -\omega.$$

On trouve $\omega_1 = 0$, $\alpha = \infty$, mais l'interprétation de ce résultat est simple si l'on remonte aux équations (1). On voit alors que

$$v_x = 0, \quad v_y = -\omega'\delta = \omega\delta, \quad v_z = 0,$$

donc les composantes v_x, v_y, v_z sont indépendantes de x, y, z; tous les points du solide ont des vitesses égales et parallèles, *le mouvement du solide se réduit à une translation*. De plus, v_x et v_z étant nuls, la vitesse de cette translation est parallèle à OY, égale à $\omega\delta$ ou au produit de la vitesse angulaire autour de OP par la distance comprise entre les deux axes, et son signe dépend du signe de ce produit. Plus simplement, en observant que le point O' a pour coordonnées δ, o, o, on voit que *cette vitesse de la translation résultante est identique, en grandeur et en direction, avec la vitesse dont le point O' est animé dans la rotation primitive autour de l'axe OP.*

Ce résultat, qui était d'ailleurs évident de lui-même, est vrai également de la vitesse du point O dans la rotation autour de O'P'.

Deux rotations simultanées d'un solide autour de deux axes parallèles, avec des vitesses égales et de sens contraire, constituent ce qu'on appelle un *couple de rotations*, et le théorème que nous venons d'établir consiste en ce que *un couple de rotations équivaut à une translation*, dont la vitesse est déterminée fort simplement en grandeur, en direction et en sens par la règle ci-dessus.

32. La considération des couples de rotation conduit à une réduction facile des mouvements de translation et de rotation dont on suppose un solide animé.

Soient OP l'axe représentatif d'une rotation, O' un point quelconque du solide ou qui lui soit invariablement lié; menons deux axes de rotation O'P', O'P'', égaux et parallèles à OP, mais opposés l'un à l'autre. Nous ne changeons évidemment rien au mouvement du solide en lui attribuant, outre la rotation OP, les rotations égales et de sens contraire O'P', O'P'', puisque les vitesses d'un même point dues à ces dernières étant égales et opposées se détruisent complétement et la vitesse totale se réduit à la vitesse due à la rotation OP. Mais les rotations OP, O'P'' constituent un couple équivalent à une translation, dont la vitesse O'V, normale au plan POO, est la même que la vitesse du point O' dans la rotation représentée par OP. Donc



Toute rotation d'un solide autour d'un axe OP *peut être remplacée par une rotation de vitesse angulaire égale, dans le même sens, autour d'un axe parallèle passant par un point* O' *choisi comme on le veut; pourvu qu'on joigne à cette rotation une translation dont la vitesse coïncide, en grandeur et en direction, avec la vitesse dont le point* O' *était animé dans la rotation autour de* OP.

Cela posé, concevons un solide animé d'un nombre quelconque de translations et de rotations simultanées autour d'axes quelconques. Prenons un point arbitraire O dans le solide (ou lié au solide), et substituons à l'une des rotations données AP, une rotation représentée par un axe égal et parallèle OQ, et une translation dont la vitesse soit OV, en conformité de la règle ci-dessus. Remplaçons de même une seconde rotation A'P' par une rotation OQ' et une translation OV', et ainsi de suite. Toutes les rotations OQ, OQ',... dont les axes se coupent en un

même point O, se réduisent à une rotation unique dont l'axe représentatif sera la résultante des axes représentatifs OQ, OQ'.... (**28**). D'autre part, les translations dont le solide était primitivement animé, et les translations nées du déplacement des axes AP, A'P',... parallèlement à eux-mêmes, se réduisent aussi à une translation unique, dont la vitesse sera représentée en grandeur et en direction par la résultante des vitesses de ces translations, transportées en un même point, par exemple au point O (**26**). Donc enfin

Quel que soit le nombre des translations et des rotations dont on suppose un solide animé simultanément, on peut toujours les réduire à une seule translation et à une seule rotation, l'axe de cette rotation pouvant même passer par un point choisi arbitrairement.

Observons toujours que le sens de ces divers théorèmes est celui que nous avons plusieurs fois rappelé, savoir 1° lorsque nous parlons de mouvements simultanés d'un solide, cela s'entend de son mouvement relatif et de ses mouvements d'entraînement par rapport à divers systèmes de comparaison; 2° toutes les propriétés se rapportent aux *vitesses* dont les points du solide sont animés à un même instant quelconque, et par suite à des translations et à des rotations instantanées. Mais on ne pourrait les appliquer au mouvement réel d'un solide, même pendant un temps infiniment petit, s'il s'agissait de calculer des éléments infiniment petits du second ordre par rapport à ce temps.

33. L'étude du mouvement d'un solide libre est facile maintenant. Soit O un point déterminé du solide, et concevons par ce point trois axes OX, OY, OZ, qui se meuvent en restant parallèles respectivement à trois axes rectangulaires fixes AX_1, AY_1, AZ_1. Prenons OXYZ pour système de comparaison. Ce système est donc animé à chaque instant d'un mouvement de translation, dont la vitesse coïncide avec la vitesse OV du point O du solide. Mais le mouvement relatif du solide par rapport au système OXYZ ne peut être que le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, puisque le point O du solide est fixe dans le système de comparaison; c'est donc une rotation autour d'un axe instantané OR qui varie constamment de grandeur et de direction. Donc



Le mouvement le plus général d'un solide libre, à un instant quelconque, se compose d'une translation dont la vitesse est égale et

parallèle à celle d'un point O *choisi à volonté dans le solide, et d'une rotation instantanée autour d'un axe* OR *passant par ce point.*

Il suit de là et de la règle de composition des vitesses que, si u_x, u_y, u_z désignent les composantes de la vitesse du point O parallèlement aux axes OX, OY, OZ; p, q, r les composantes de l'axe instantané OR suivant ces mêmes axes; x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M du solide rapporté à ces axes et v_x, v_y, v_z les composantes de sa vitesse totale, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} v_x &= u_x + qz - ry, \\ v_y &= u_y + rx - pz, \\ v_z &= u_z + py - qx. \end{aligned}\right.$$

La vitesse de translation OV dépend évidemment du choix du point O dans le solide, mais *l'axe instantané* OR *a même grandeur et même direction, quel que soit le point choisi.* En effet, supposons qu'on prenne un autre point O′ du solide, et qu'on substitue à la rotation OR une rotation O′R′ dont l'axe soit égal et parallèle à OR, accompagnée



d'une translation $O'V_1$, normale au plan ROO′ et déterminée par la règle ci-dessus. La vitesse de translation primitive OV, transportée au point O′ en O′V′, se compose avec $O'V_1$ et donne une translation unique O′V″. En résumé, sans que rien soit changé au mouvement du solide, la translation OV et la rotation OR sont remplacées par la translation O′V″ et la rotation O′R′. Mais la vitesse du point O′ dans la rotation O′R′ étant nulle, sa vitesse totale se confond avec celle de la nouvelle translation O′V″, donc la rotation O′R′ est précisément celle que l'on aurait trouvée d'abord, si l'on avait choisi le point O′ au lieu du point O : or, O′R′ est égal et parallèle à OR, d'où résulte la propriété énoncée.

34. Enfin, l'on peut choisir le point autour duquel on fait tourner le solide de telle manière, que la vitesse de translation et l'axe de rotation soient dirigés suivant une même droite. Soient, pour une origine quelconque O, OV la translation et OR la rotation correspondantes. Décomposons la vitesse OV en deux autres, l'une OV_1 dirigée suivant l'axe instantané de rotation, l'autre OV_2 perpendiculaire à cet axe. Dans le plan mené par OR normalement à OV_2, cherchons un point O′ tel, que sa vitesse O′V″, due à la rotation représentée par l'axe OR, soit égale et

parallèle à OV_2, mais de sens contraire. La détermination d'un tel point est facile par la relation qui existe entre la distance d'un point à l'axe de rotation, la vitesse angulaire de rotation et la vitesse du point (**16**), et il est même facile de voir que tous les points d'une certaine droite, parallèle à OR, vérifient la condition demandée.

Ce point trouvé, transportons y l'axe OR suivant O'R'; la translation née de ce déplacement de l'axe de rotation aura précisément pour vitesse O'V'', d'après la règle du N° 32, et si la compose avec les vitesses des translations $O'V'_1$, $O'V'_2$, respectivement égales et parallèles à OV_1, OV_2, on aura la translation définitive correspondante au point O'. Mais les translations O'V'', $O'V'_2$ se détruisent; il reste donc simplement la translation $O'V'_1$, dirigée suivant l'axe O'R', et la rotation instantanée représentée par cet axe. On obtient ainsi le beau théorème de Giulio Mozzi :



A un instant quelconque, les vitesses de tous les points d'un solide libre sont les mêmes, en grandeur et en direction, que si le solide tournait actuellement autour d'un certain axe, en même temps qu'il glisse le long de cet axe, appelé *axe instantané de rotation et de glissement* (1).

Ce mouvement d'un solide est *celui d'une vis dans son écrou.*

D'ailleurs la vitesse $O'V'_1$ de translation du solide suivant l'axe instantané est, d'après ce qui précède, égale à la composante OV_1 de la vitesse totale du point O suivant OR; et comme le point O est quelconque, *les projections des vitesses de tous les points d'un solide à un même instant, sur l'axe instantané de glissement et de rotation qui répond à cet instant, sont égales entr'elles et à la vitesse de glissement le long de l'axe.* Ce qui fournit un moyen très-simple de déterminer l'axe quand on connaît les vitesses de trois points du solide.

35. L'axe de rotation et de glissement se déplace incessamment, en sorte que le mouvement héliçoïdal n'a jamais lieu pendant un temps fini, si petit qu'il soit. Pour se figurer le mouvement réel du solide pendant un temps fini, on devra considérer la surface réglée qui est le lieu de cet axe instantané dans l'espace, et ensuite cette autre surface réglée, invaria-

---

(1) M. De Tilly a démontré directement ce théorème d'une manière très-simple, dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, t. XXXV, 2e série.

blement liée au solide, qui est le lieu de positions successives de l'axe instantané dans le solide lui-même. On voit sans peine que cette seconde surface est tangente à la première, à chaque instant, sur toute la longueur de la génératrice commune, qui est l'axe instantané pour cet instant. Si donc on conçoit qu'elle roule sur la première, supposée fixe, en même temps qu'elle glisse le long de la génératrice du contact avec une certaine vitesse, et qu'elle emporte avec elle le solide, le mouvement qui prendra celui-ci sera identique avec le mouvement que l'on considérait d'abord.

On peut aussi se figurer d'une manière claire le mouvement le plus général d'un solide par le théorème suivant, qui découle immédiatement des principes exposés au N° 33 : *Ce mouvement se réduit au roulement d'un cône fixe dans le solide, sur un cône animé d'un mouvement de translation égal à celui du sommet commun des deux cônes.*

Exercices.

1. La terre tourne autour de son axe de figure ON de l'ouest à l'est en un jour sidéral; cet axe lui-même tourne autour d'une parallèle ON' à l'axe de l'écliptique, de l'est à l'ouest, et si l'on ne tient pas compte de la nutation, le plan N'ON décrit en un jour sidéral un angle de 0'',136795. L'angle NON' = 23°27'32''. Déterminer les vitesses angulaires ω et ω' de ces deux rotations, l'axe instantané réel OR, la vitesse angulaire correspondante ω_1.

R. Le jour sidéral étant pris pour unité de temps, on a

$$\omega = 2\pi, \quad \omega' = \frac{0,136795}{648000}, \quad tg\,\text{NOR} = \frac{\omega' \sin \text{NON}'}{\omega - \omega' \cos \text{NON}'}, \quad \text{NON}' = 23^\circ 27' 30'',$$

$$\text{NOR} = 0'',0087, \quad \omega_1 = \frac{\sin \text{NON}'}{\sin \text{NOR}}\,\omega.$$

2. Deux cylindres solides, mobiles respectivement autour de deux axes parallèles, se touchent constamment le long d'une génératrice. Soient ω, ω' les vitesses angulaires de rotation. Déterminer le mouvement relatif du premier cylindre par rapport au second, le rapport des vitesses ω et ω', la condition pour qu'il n'y ait pas de glissement d'un cylindre sur l'autre.

R. Soient AB, A'B' les sections des cylindres ; O, O' celles de leurs axes de rotations, par un plan normal à ces axes, M le point de contact de AB, A'B' : il suffit de considérer le mouvement de ces sections planes. Le mouvement relatif de AB par rapport à A'B' est une rotation autour d'un point C, intersection de la droite OO' par la normale commune en M, avec une vitesse angulaire $\omega + \omega'$. On a ensuite

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\text{O'C}}{\text{OC}},$$

La *vitesse de glissement* w (ou vitesse relative des points en contact) est égale à $(\omega + \omega')$ MC, et l'on trouve

$$\frac{w}{\sin OMO'} = \frac{\omega \cdot OM}{\sin CMO'} = \frac{\omega' \cdot O'M}{\sin CMO}.$$

Pour que w soit nul, il faut que le point M soit constamment sur la droite OO'.

2. Étant donnée la section A'B', déterminer AB de manière que le glissement soit nul.

R. Soit $\theta' = \varphi(r')$ l'équation de A'B' dans un système polaire dont O' est le pôle; a la distance OO'. L'équation différentielle polaire de AB, le pôle étant en O, sera

$$d\theta = \frac{a-r}{r}\varphi'(a-r)\,dr.$$

3. Deux solides tournent respectivement avec des vitesses données autour de deux axes non situés dans un même plan ; trouver, pour un instant quelconque, leur mouvement relatif, l'axe instantané de rotation et de glissement de ce mouvement.

4. Si, d'un point O, on tire des droites respectivement égales et parallèles aux vitesses de tous les points d'un solide libre à un même instant, le lieu des extrémités de de ces droites sera un plan normal à l'axe instantané glissant du solide.

5. Étant données en grandeur et en direction les vitesses de trois points d'un solide libre, à un instant donné, construire l'axe instantané glissant pour cet instant, et trouver les vitesses de rotation et de glissement.

6. Le mouvement d'un solide libre à un instant donné peut se réduire, d'une infinité de manières, à deux rotations instantanées autour de deux axes qui, généralement, ne se coupent pas. Démontrer que le volume du tétraèdre construit sur les axes représentatifs de ces deux rotations, comme arêtes opposées, à un volume constant.

R. Soient w, ω_1 les vitesses de glissement et de rotation autour de l'axe instantané à l'instant considéré, $OP = \omega$, $O'P' = \omega'$ les axes qui représentent les deux rotations données, $OO' = \delta$ leur plus courte distance. On démontre 1° que l'on a

$$w\,\omega_1 = \omega\,\omega'\,\delta \sin(OP, O'P');$$

2° que le volume du tétraèdre OPO'P' est

$$\frac{1}{6}\,\omega\,\omega'\,\delta \sin(OP, O'P').$$

7. Connaissant la vitesse v d'un point A sur une courbe gauche, déterminer, pour le trièdre AXYZ formé de la tangente AX, de la normale principale AY, et de la perpendiculaire AZ au plan osculateur, l'axe instantané glissant, les vitesses w et ω_1 de glissement et de rotation relatives à cet axe.

R. Les rayons de courbure et de torsion étant R, T, on trouve que l'axe instantané glissant est parallèle à la rectifiante, coupe la normale principale à une distance $\frac{RT^2}{R^2+T^2}$, et que l'on a

$$w = \frac{vR}{\sqrt{R^2+T^2}}, \quad \omega_1 = \frac{v\sqrt{R^2+T^2}}{RT}.$$

8. Un solide a un mouvement quelconque dans l'espace ; un plan P est emporté avec lui : le mouvement de ce plan à un instant quelconque se compose de deux rotations simultanées, l'une autour d'un axe CX situé dans le plan, l'autre autour d'un axe FZ normal au plan. Le premier CX se nomme la *caractéristique* du plan ; le second perce le plan en un point F que l'on nomme *foyer* du plan.

Les plans normaux aux trajectoires de tous les points du plan passent par le foyer du plan.

Tous les points situés sur la caractéristique ont leurs vitesses dirigées dans le plan.

Quand plusieurs plans du solide passent par une même droite D, leurs foyers sont sur une même droite Δ. Réciproquement, tout plan passant par la droite Δ a son foyer sur la droite D : les droites D et Δ sont dites *conjuguées*.

Deux droites conjugées sont deux axes de rotations simultanées auxquelles on peut réduire le mouvement du solide.

La perpendiculaire commune à deux droites conjugées quelconques D et Δ va rencontrer l'axe instantané glissant à angle droit.

Quand deux plans se coupent à angle droit, les distances de leurs foyers à l'axe instantané glissant donnent un produit constant, et les distances de leurs caractéristiques à cet axe aussi.

Quand plusieurs plans passent par une même droite, leurs caractéristiques sont sur un même hyperboloïde à une nappe.

9. Dans un solide animé d'un mouvement quelconque, à un même instant, les normales menées aux trajectoires de tous les points du solide, parallèlement à un même plan quelconque, vont toutes rencontrer une droite parallèle à l'axe instantané glissant.

N. B. Le lecteur désireux d'approfondir cette théorie pourra consulter : Chasles, *Propriétés géométriques du mouvement infiniment petit d'un corps solide* (*Comptes-Rendus de l'Académie*, 26 juin 1843) ; — Lamarle, *Théorie géométrique des centres et axes instantanés de rotation ;* — A. Mannheim, *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* (*Mém. des Sav. étrangers de l'Institut de France*, t. XX), et plusieurs autres travaux de ce savant géomètre.

CHAPITRE VII.

DE L'ACCÉLÉRATION.

§ 1. ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT.

36. Nous n'avons jusqu'ici considéré, dans le mouvement d'un point ou d'un solide, que les vitesses, qui dépendent d'infiniment petits du premier ordre ; l'étude plus intime du mouvement exige l'introduction

d'infiniment petits du second ordre, qui conduisent à la notion de *l'accélération*.

Soient M, M′ les positions d'un point mobile aux époques infiniment voisines t, $t + \Delta t$; MV, M′V′ les vitesses correspondantes; MV_1 égal et parallèle à M′V′. La droite VV_1 est *l'accélération élémentaire* du point M. Si, du point M, on tire MJ parallèle à la direction VV_1 prise à la limite, et égal à la limite du rapport de l'accélération élémentaire au temps Δt, cette droite MJ sera, en grandeur et en direction, ce que nous appellons *l'accélération totale*, ou simplement *l'accélération* du point mobile, à l'époque t. En la désignant par j, nous aurons



$$j = \lim \frac{VV_1}{\Delta t}.$$

La direction de l'accélération est évidemment (Cours d'An., 187) *dans le plan osculateur* de la trajectoire en M.

Pour trouver ses composantes j_x, j_y, j_z parallèlement aux axes rectangulaires, projetons le contour fermé MVV_1M sur l'axe OX, ce qui donnera

$$v_x + VV_1 \cos(VV_1, X) - (v_x + \Delta v_x) = 0,$$

ou, divisant par Δt et passant à la limite,

$$j \cos(j, X) = \frac{dv_x}{dt}.$$

Nous avons donc, en opérant de même pour OY, OZ,

$$j_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad j_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad j_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Les composantes de l'accélération parallèlement à trois axes rectangulaires, à un instant quelconque, sont les dérivées des composantes respectives de la vitesse au même instant.

Remplaçant v_x, v_y, v_z par leurs valeurs, on a les formules souvent employées :

$$(1) \quad j_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad j_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad j_z = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad j = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

La considération du triangle MVV_1 conduit à d'autres conséquences utiles. Si l'on néglige les infiniment petits du second ordre par rapport

à Δt, on a $VV_1 = j\Delta t$, et la direction VV_1 peut être prise pour celle de l'accélération; donc *la vitesse d'un point mobile à l'instant $t + \Delta t$ est la résultante de sa vitesse à l'instant t, et de son accélération au même instant multipliée par Δt, aux infiniment petits près du second ordre.*

27. Appelons α, β, γ les cosinus directeurs de la vitesse MV; λ, μ, ν ceux de la normale principale MN à la trajectoire; l, m, n ceux d'une droite quelconque MP sur laquelle nous projetons l'accélération. Les équations

$$j_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad v_x = v\alpha,$$

donnent

$$j_x = \alpha\frac{dv}{dt} + v\frac{d\alpha}{dt} = \alpha\frac{dv}{dt} + v^2\frac{d\alpha}{ds} = \alpha\frac{dv}{dt} + \frac{v^2\lambda}{R},$$

R étant le rayon de courbure en M de la trajectoire. On a des expressions semblables pour j_y, j_z, d'où l'on déduit

$$j \cos \text{JMP} = lj_x + mj_y + nj_z = (\alpha l + \beta m + \gamma n)\frac{dv}{dt} + (l\lambda + m\mu + n\nu)\frac{v^2}{R},$$

ou

$$j \cos \text{JMP} = \frac{dv}{dt}\cos \text{VMP} + \frac{v^2}{R}\cos \text{NMP}.$$

Si l'on fait coïncider successivement la direction MP avec MV, MN, on a dans le premier cas $\cos \text{VMP} = 1$, $\cos \text{NMP} = 0$, dans le second $\cos \text{VMP} = 0$, $\cos \text{NMP} = 1$, et l'on obtient ainsi les *accélérations tangentielle* et *normale* j_t, j_n, savoir

$$j_t = \frac{dv}{dt}, \quad j_n = \frac{v^2}{R}.$$

On remarquera que la seconde est essentiellement positive, en sorte que *la composante normale de l'accélération est toujours dirigée vers le centre de courbure;* tandis que la première est de même signe que $\frac{dv}{dt}$, ce qui montre que *l'accélération fait un angle aigu ou obtus avec la vitesse, suivant que celle-ci est croissante ou décroissante.*

Des considérations géométriques bien simples conduisent aux mêmes résultats.

28. 1° Si le mouvement est rectiligne, on prend pour axe des x la droite parcourue par le point mobile; l'accélération se réduit évidemment

à sa composante j_i ou $\frac{dv}{dt}$, puisque l'on a ici $v = \frac{dx}{dt}$. D'où résulte le théorème suivant : *Dans un mouvement quelconque, la projection de l'accélération du point mobile sur un axe fixe, à un instant quelconque, est égale à l'accélération de la projection du point mobile sur le même axe.*

Si, de plus, dans le mouvement rectiligne, *l'accélération j est constante,* $j = a$, on dit que le mouvement est *uniformément varié.* La relation ci-dessus devient

$$\frac{dv}{dt} = a, \quad \text{d'où} \quad (2) \quad v = at + v_0,$$

v_0 désignant la vitesse à l'époque $t = 0$. Ainsi *dans un mouvement uniformément varié, la vitesse varie proportionnellement au temps.* On a ensuite

$$\frac{dx}{dt} = at + v_0, \quad (3) \quad x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0,$$

en intégrant et désignant par x_0 la valeur initiale de x. Les équations (2) et (3) sont celles du mouvement uniformément varié : elles déterminent, pour une valeur quelconque de t, la vitesse et la position du point sur la droite. Rappelons encore que les quantités a, v_0, x_0 peuvent être positives ou négatives, suivant nos conventions, et qu'il en résulte pour v, x des valeurs positives ou négatives qui déterminent le sens du mouvement et la position du mobile à droite ou à gauche de l'origine. Une discussion complète de toutes les particularités que le mouvement peut offrir, d'après les signes des quantités a, v_0, x_0, n'offrirait aucune difficulté. Dans le mouvement rectiligne et uniforme, l'accélération est nulle.

Le mouvement des corps pesants à la surface de la terre, comme nous le verrons, présente un exemple remarquable de mouvement rectiligne uniformément varié.

2° Comme second cas particulier, supposons un point M qui décrit un cercle de centre C, de rayon r, la vitesse angulaire variable du rayon CM étant ω. On a ici

$$v = \omega r, \qquad R = r, \qquad j_n = \omega^2 r,$$

et cette accélération normale est dirigée de M vers le centre C du cercle.

Si donc (x, y) sont les coordonnées du point M ; (α, β) celles du centre C, les cosinus directeurs de MC étant

$$-\frac{x-\alpha}{r}, \quad -\frac{y-\beta}{r},$$

les composantes, parallèles aux axes, de l'accélération normale seront

$$-\omega^2(x-\alpha), \quad -\omega^2(y-\beta).$$

Si, de plus, la vitesse angulaire ω est constante, l'accélération tangentielle étant nulle, l'accélération totale du mobile se réduira à l'accélération normale que nous venons de déterminer en grandeur et en direction.

Exercices.

1. Démontrer que, dans un mouvement rectiligne uniformément varié, 1° la vitesse moyenne dans un temps donné est la moyenne des vitesses au commencement et à la fin de ce temps; 2° le demi-accroissement du carré de la vitesse dans un temps donné est le produit de l'accélération par le chemin parcouru dans ce temps ; 3° l'espace parcouru dans un temps donné est la moitié de l'espace qui serait parcouru dans le même temps avec la vitesse acquise par le mobile à la fin de ce temps.

2. Un point part de l'origine avec une vitesse positive v_0, et une accélération constante négative égale à $-a$; déterminer la distance maximum à laquelle ce point s'éloignera de l'origine.

3. Deux points partent d'une même position sans vitesse initiale, avec des accélérations égales et de même direction, aux époques $t=0$, $t=\theta$. Déterminer l'instant où leur distance sera égale à une longueur donnée l, et les espaces qu'ils auront alors parcouru.

4. Un point M parcourt une circonférence de rayon r avec une vitesse variable : quelle doit être la vitesse angulaire ω du rayon mené du centre O au point mobile pour que la direction de l'accélération passe constamment par un point fixe donné A, et quelle est la loi du mouvement du point?

R. Soient a la distance OA, θ l'angle que fait le rayon OM avec OA, k une constante arbitraire ; on trouve

$$\omega = \frac{k}{r - a\cos\theta}, \quad Kt = a\sin\theta - r\theta,$$

en supposant θ nul en même temps que t.

§ 2. DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN.

39. Reprenons les équations (1) du N° 18, qui donnent les composantes de la vitesse d'un point quelconque d'une figure mobile dans son plan,

$$(1) \qquad v_x = \omega(y-\beta), \quad v_y = -\omega(x-\alpha).$$

Différentions-les par rapport au temps; il viendra

$$\frac{dv_x}{dt} = j_x = \omega\left(v_y - \frac{d\beta}{dt}\right) + \frac{d\omega}{dt}(y-\beta) = -\omega\frac{d\beta}{dt} - \omega^2(x-\alpha) + \frac{d\omega}{dt}(y-\beta),$$

$$\frac{dv_y}{dt} = j_y = -\omega\left(v_x - \frac{d\alpha}{dt}\right) - \frac{d\omega}{dt}(x-\alpha) = \omega\frac{d\alpha}{dt} - \omega^2(y-\beta) - \frac{d\omega}{dt}(x-\alpha),$$

pour les composantes de l'accélération parallèlement aux axes.

Concevons qu'un point mobile C coïncide à chaque instant avec le centre instantané de rotation pour cet instant; sa vitesse w, que nous nommerons pour abréger *vitesse du centre instantané*, aura pour composantes parallèles aux axes

$$w_x = \frac{d\alpha}{dt}, \quad w_y = \frac{d\beta}{dt},$$

et les équations ci-dessus pourront s'écrire

$$(2) \qquad \begin{cases} j_x = -\omega w_y - \omega^2(x-\alpha) + \dfrac{d\omega}{dt}(y-\beta), \\ j_y = \omega w_x - \omega^2(y-\beta) - \dfrac{d\omega}{dt}(x-\alpha). \end{cases}$$

Les composantes de l'accélération J du point de la figure mobile qui coïncide actuellement avec le centre instantané correspondent à $x=\alpha$, $y=\beta$, et sont

$$J_x = -\omega w_y, \quad J_y = \omega w_x;$$

nous déterminerons plus loin la direction et la valeur de J. Les termes suivants, dans les équations (2),

$$-\omega^2(x-\alpha), \quad -\omega^2(y-\beta),$$

représentent (**38**) les composantes parallèles aux axes de l'accélération normale MN qu'aurait le point M si la figure tournait autour du point C,

supposé fixe, avec une vitesse angulaire constante ω : cette accélération est dirigée de M vers C. Enfin, les termes

$$\frac{d\omega}{dt}(y-\beta), \quad -\frac{d\omega}{dt}(x-\alpha),$$

représentent, toujours d'après les mêmes formules (1), les composantes de la vitesse qu'aurait le point M, si la figure tournait autour du point C avec une vitesse angulaire égale à $\frac{d\omega}{dt}$: cette vitesse est normale à MC, dans un sens qui dépend du signe de $\frac{d\omega}{dt}$. Il suit donc des propriétés des résultantes que

L'accélération d'un point quelconque M *de la figure mobile est la résultante 1° d'une accélération* MP *égale et parallèle à celle du point* C *de la figure, qui coïncide actuellement avec le centre instantané; 2° de l'accélération normale* MN *correspondante à une rotation autour du centre fixe* C *avec la vitesse angulaire constante* ω*; 3° de la vitesse* MQ *correspondante à une rotation autour du point* C *avec la vitesse angulaire* $\frac{d\omega}{dt}$.



On peut donner une autre forme à ce théorème. Si la figure tournait autour du point C, supposé fixe, avec sa vitesse angulaire *variable* ω, w_x, w_y seraient nuls, mais rien d'autre ne serait changé dans les formules (2) : il suit de là que les composantes MN, MQ, prises ensemble, donnent l'accélération totale du point quelconque M dans cette nouvelle hypothèse. Donc

Dans le mouvement général d'une figure invariable dans son plan, l'accélération d'un point quelconque M *de la figure est la résultante 1° d'une accélération égale et parallèle à celle du point qui coïncide avec le centre instantané actuel; 2° de l'accélération qu'aurait le point* M *si la figure tournait, avec sa vitesse angulaire variable, autour de ce même centre devenu fixe.*

40. Pour simplifier les formules (2), plaçons l'origine des axes au centre instantané C, l'axe des x positifs dans la direction de la vitesse du point C, l'axe des y positifs perpendiculaire, la rotation de CX vers CY ayant lieu *de droite à gauche*. Il viendra

$$w_x = w, \quad w_y = 0, \quad J_x = 0, \quad J_y = \omega w,$$

en sorte que J_y sera de même signe que ω. Donc l'accélération J du point de la figure qui coïncide avec le centre instantané C est égale au produit de la vitesse angulaire ω par la vitesse w du centre instantané, et sa direction s'obtient en faisant tourner cette dernière de 90° dans le sens contraire à celui de la rotation ω.

Dans les équations (2), on doit faire $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $w_x = w$, $w_y = 0$, d'où

$$(3) \qquad \begin{cases} j_x = -\omega^2 x + \dfrac{d\omega}{dt} y, \\ j_y = \omega w - \omega^2 y - \dfrac{d\omega}{dt} x. \end{cases}$$

Cherchons, dans la figure mobile, un point C′ qui ait une accélération nulle : ses coordonnées α', β' vérifieront les égalités

$$(4) \qquad \omega^2 \alpha' - \frac{d\omega}{dt}\beta' = 0, \qquad \frac{d\omega}{dt}\alpha' + \omega^2 \beta' = \omega w,$$

et le dénominateur commun des valeurs de α', β',

$$\omega^4 + \frac{d\omega^2}{dt^2}$$

ne pouvant s'évanouir, il existe un point C′, et un seul. Il est déterminé par l'intersection de deux droites, lieux des équations (4) : la première passe par l'origine et est perpendiculaire à la seconde, qui coupe les axes CX, CY à des distances



$$\mathrm{CI} = \frac{\omega w}{\dfrac{d\omega}{dt}}, \qquad \mathrm{CK} = \frac{w}{\omega}.$$

La construction du point C′ est donc facile, par l'intersection de deux cercles décrits respectivement sur CI et sur CK comme diamètres. On remarquera que le signe de CK est le même que celui de ω; le point K est donc du côté du point C où est dirigée l'accélération J, sur la normale commune à la courbe fixe et à la courbe roulante dont le mouvement détermine celui de la figure mobile.

On tire, des équations (3) et (4),

$$\begin{cases} j_x = -\omega^2 (x - \alpha') + \dfrac{d\omega}{dt}(y - \beta'), \\ j_y = -\omega^2 (y - \beta') - \dfrac{d\omega}{dt}(x - \alpha'), \end{cases}$$

et ces valeurs de j_x, j_y, d'après les remarques faites plus haut (**39**), montrent clairement que *l'accélération d'un point quelconque de la figure, à chaque instant, est la même en grandeur et en direction, que si la figure tournait actuellement autour du point C' supposé fixe, avec sa vitesse angulaire variable* ω.

De là le nom de *centre instantané des accélérations* que l'on donne au point C'.

41. Déterminons la composante normale j_n de l'accélération du point M, dirigée évidemment suivant MC ou son prolongement. Si u désigne la distance CM du centre instantané au point considéré, $-\dfrac{x}{u}$, $-\dfrac{y}{u}$, seront les cosinus directeurs de la droite MC (de M vers C), et, en vertu des formules (3), nous aurons

$$j_n = -\frac{xj_x + yj_y}{u} = \frac{\omega^2 (x^2 + y^2) - \omega w y}{u},$$

la composante j_n étant donc considérée comme positive dans le sens MC et comme négative en sens contraire.

Si l'on fait $j_n = 0$, on trouve pour l'équation du *lieu des points dont l'accélération normale est nulle*

$$\omega (x^2 + y^2) - wy = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - \frac{w}{\omega} y = 0,$$

ce qui représente évidemment *le cercle décrit sur* CK *comme diamètre*.

En outre, soient φ l'angle qui fait le rayon de rotation CM avec la direction CY définie ci-dessus, u' la distance CK; on a

$$x^2 + y^2 = u^2, \quad y = u \cos \varphi, \quad u' = \frac{w}{\omega},$$

d'où

$$j_n = \omega^2 (u - u' \cos \varphi),$$

expression très-simple de l'accélération normale du point M.

D'un autre côté, soit $R = MZ$ le rayon de courbure de la trajectoire décrite par le point M. On a, comme on sait,

$$j_n = \frac{\omega^2 u^2}{R},$$

et en égalant les deux valeurs de j_n,

$$\frac{u^2}{R} = u - u' \cos\varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{u(R-u)}{R} = u' \cos\varphi,$$

ou encore, en posant $R = u + \zeta$,

$$(5) \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{u' \cos\varphi}.$$

Cette équation fait connaître la distance ζ du centre instantané C au centre de courbure Z, lorsque le point K étant connu, on donne les coordonnées polaires u et φ du point M : on pourra donc construire le point Z; mais on voit sans peine que, pour la généralité de la formule (5), la distance ζ doit être affectée du signe + ou —, suivant que le point Z est au delà ou en deçà du centre instantané, par rapport au point mobile M.



Cela posé, l'équation (5) donne lieu à la construction suivante : joignant MC, on a la normale à la trajectoire du point M. Menant CN, KK' perpendiculaires à MC, on joindra un point *quelconque* N de la droite CN au point M. Soit R l'intersection de K'K et de MN. On tire RC, puis NZ parallèle à RC : le point Z où cette parallèle coupe la normale MC est le centre de courbure cherché.

En effet, les triangles semblables MCN, MK'R, et MRC, MNZ, donnent

$$\frac{MC}{K'C} = \frac{MN}{RN} = \frac{MZ}{CZ}, \quad \text{ou} \quad \frac{u}{u' \cos\varphi} = \frac{u + CZ}{CZ},$$

ou

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{CZ} = \frac{1}{u' \cos\varphi},$$

ce qui, vu la relation (5), donne $CZ = \zeta$.

Cette construction est absolument générale, quels que soient les signes des quantités u', $\cos\varphi$, ζ.

Le point N étant arbitraire sur CN, choisissons-le de manière que MN passe par le point K. Les points K, R coïncident, RC se confond avec KC et NZ est parallèle à KC. De là cette construction plus simple du centre

de courbure : *joindre le point décrivant* M *au point* K, *et par le point* N *où cette droite coupe la perpendiculaire en* C *à la droite* MC, *mener une parallèle à la droite qui joint les points* K, C. *Cette parallèle coupe la normale* MC *au centre de courbure* Z.

L'équation (5) donne encore les conclusions suivantes : 1° Si le point M est sur la circonférence dont CK est le diamètre, $u = u' \cos \varphi$, $\zeta = \infty$, le point Z est à l'infini : *tout point de la figure mobile appartenant à cette circonférence décrit actuellement un point d'inflexion sur sa trajectoire;* 2° ζ est positif si le point M est en dehors de ce cercle, négatif s'il est intérieur au cercle : la trajectoire du point M tourne donc sa concavité ou sa convexité vers le centre instantané, selon que le point M est extérieur ou intérieur au cercle ; 3° *si un point donné de la figure décrit une droite dans le mouvement, cette droite va passer par le point* K, car R, et par suite ζ, étant infini, $u = u' \cos \varphi$, le point mobile est sur le cercle, la direction de sa vitesse passe donc par K. Cette remarque est souvent utile.

42. La détermination du point K, fondement des constructions précédentes, semble exiger que l'on connaisse les vitesses w, ω; mais quand les conditions géométriques qui définissent le mouvement d'une figure fournissent immédiatement les centres de courbure Z_1 et Z_2 des trajectoires de deux points M_1, M_2, pour une position quelconque de la figure, il suffit de renverser la construction ci-dessus pour obtenir deux droites passant par le point K et le déterminant. Soit C le centre instantané (intersection des normales M_1Z_1, M_2Z_2), CN_1 perpendiculaire à M_1Z_1 ; joignons un point N_1 de cette perpendiculaire à M_1 et à Z_1, menons CR_1 parallèle à Z_1N_1, R_1K' perpendiculaire à M_1Z_1 ; il suit du théorème ci-dessus que la droite R_1K' passera par le point K. Le point M_2 donnera une droite semblable passant en K.



Dans le cas fréquent où le mouvement de la figure est défini par le roulement d'une courbe A'B' sur une courbe fixe AB, si l'on connaît les centres de courbure O' et O de ces courbes, relatifs à leur point de contact actuel C, voici comment on en déduit le point K.

Pendant un temps infiniment petit dt, la figure éprouve un déplacement qui amène le point C' de la courbe A'B' en C_1 sur AB ; soit

$CC' = CC_1 = d\sigma$. Le déplacement angulaire ωdt de la figure est égal à l'angle compris entre les tangentes à AB en C_1 et à A'B' en C'; donc, si R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure CO et CO' des courbes AB, A'B', on a (1)



$$\omega\, dt = \frac{d\sigma}{R_1} + \frac{d\sigma}{R_2},$$

en négligeant les quantités du second ordre. Mais comme d'autre part $\frac{d\sigma}{dt}$ représente la vitesse w du centre instantané, cette égalité se réduit à

$$\frac{\omega}{w} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \text{ou} \quad (6) \quad \frac{1}{u'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

D'où cette construction : joindre un point *quelconque* S du plan aux points O, C, O'; tirer CS' parallèle à OS, et par le point de rencontre S' de CS' et SO', S'K parallèle à CS; S'K coupe OO' au point cherché K. En effet, les triangles semblables O'OS, O'CS', et O'CS, O'KS', donnent

$$\frac{OO'}{CO} = \frac{O'S}{S'S} = \frac{O'C}{CK},$$

ou

$$\frac{1}{CK} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{u'}.$$

Donc $CK = u'$; cette construction a encore toute la généralité possible, quels que soient les signes de R_1, R_2, u'.

Quand les points O et O' sont ainsi donnés, on peut combiner la construction précédente et celle du n° **41** de manière à obtenir le point Z sans passer par le point K. En effet, le point S étant arbitraire, choisissons-le à l'intersection N de la droite MO' qui joint le point décrivant au centre de courbure de la courbe roulante, et de la perpendiculaire CN à la normale MC. Appliquant ensuite la construction décrite ci-dessus pour obtenir le point K, puis la construction du n° **41** pour obtenir le point Z, on voit immédiatement que le point R va se confondre avec le point S', la droite RC avec S'C, et la parallèle NZ avec NO;

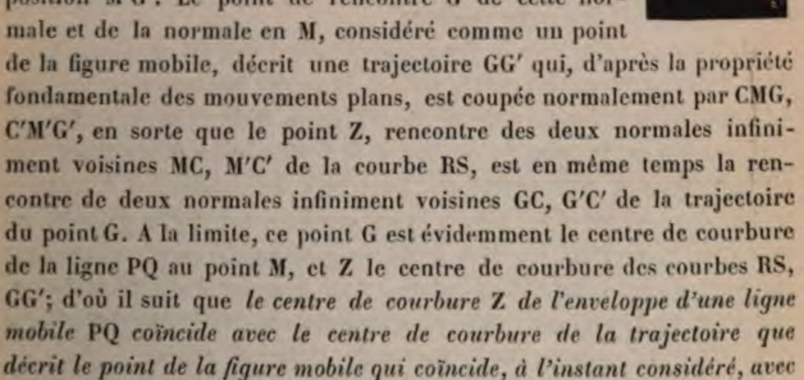


(1) Chacun des rayons R_1, R_2 changerait de signe dans une position inverse de celle qu'il a sur la figure.

donc Z est l'intersection de la normale MC avec NO, d'où la construction de Savary : *joindre le point décrivant* M *au centre de courbure* O′ *de la courbe roulante; mener par le centre instantané une perpendiculaire* CN *à la normale* MC, *et joindre le point d'intersection* N *des droites* MO′, CN, *au centre de courbure* O *de la courbe fixe. La droite* NO *coupe la normale* MC *au centre de courbure* Z *de la trajectoire du point* M.

43. La détermination du centre de courbure de l'enveloppe d'une ligne, invariablement liée à la figure mobile, se ramène à la construction précédente par le théorème qui suit :

Soient, à l'instant considéré, PQ la ligne mobile, RS son enveloppe, M le point de contact : il suit du théorème du n° **21** que la normale MG à ces deux lignes passe par le centre instantané actuel C.



Au bout d'un temps infiniment petit, la ligne mobile est en P′Q′, le point de contact en M′, le centre instantané en C′ sur la normale M′G′. Soit M_1 le point de la ligne PQ qui coïncide avec M′ après le déplacement, et M_1G la normale de cette ligne qui vient occuper la position M′G′. Le point de rencontre G de cette normale et de la normale en M, considéré comme un point de la figure mobile, décrit une trajectoire GG′ qui, d'après la propriété fondamentale des mouvements plans, est coupée normalement par CMG, C′M′G′, en sorte que le point Z, rencontre des deux normales infiniment voisines MC, M′C′ de la courbe RS, est en même temps la rencontre de deux normales infiniment voisines GC, G′C′ de la trajectoire du point G. A la limite, ce point G est évidemment le centre de courbure de la ligne PQ au point M, et Z le centre de courbure des courbes RS, GG′; d'où il suit que *le centre de courbure* Z *de l'enveloppe d'une ligne mobile* PQ *coïncide avec le centre de courbure de la trajectoire que décrit le point de la figure mobile qui coïncide, à l'instant considéré, avec le centre de courbure* G *de la ligne* PQ, *correspondant au point de contact de cette ligne et de son enveloppe*.

On voit que, dans les constructions exposées plus haut pour obtenir le centre de courbure Z lorsque les points C et K sont connus, ou les points C, O, O′, il suffira de prendre pour point décrivant le centre de courbure G de la ligne mobile PQ, et d'appliquer ces constructions sans autre changement : elles conduiront à un centre de courbure Z qui sera précisément celui de l'enveloppe de la ligne PQ. La même modification

s'appliquerait à la construction réciproque qui nous a servi pour remonter du point Z au point K.

44. *Application à divers problèmes.* — I. *Epicycloïdes.* Un cercle O' roule, extérieurement ou intérieurement, sur un cercle O fixe : un point M de la circonférence du cercle roulant décrit une épicycloïde. Le point de contact C des cercles est le centre instantané, MC est la normale à l'épicycloïde. Joignons le point N, extrémité du diamètre MO', au centre O du cercle fixe : NO coupe la normale MC au centre de courbure Z de l'épicycloïde, d'après la construction de Savary. — Le cas où le point M est en dehors ou en dedans du cercle O' se traite de même.

II. Reprenons l'ellipse décrite par un point M d'une droite AB qui s'appuie sur deux droites fixes (**22**). Nous avons trouvé le centre instantané C et la normale MC. Les points A, B de la figure mobile décrivant des droites OX, OY, le point K est à l'intersection O de ces deux droites. Joignant OM, menant CN normale à MC, et par l'intersection N de OM, CN, une parallèle à OC, cette parallèle coupe MC au centre de courbure Z de l'ellipse décrite par le point M. — On pourrait aussi se servir de la construction de Savary, puisque l'on a les centres de courbure O et O' de la courbe fixe et de la courbe roulante.

III. Rayon de courbure de l'enveloppe d'une droite AB qui s'appuie sur deux droites rectangulaires OX, OY. — Le centre instantané est toujours à l'intersection C des normales à OX, OY, en A, B. Le point M, projection de C sur AB, est le point de contact de la droite avec son enveloppe, CM est la normale à cette enveloppe. Le centre de courbure G de la ligne mobile étant à l'infini sur CM, la droite qui joint ce point au point K, qui est ici en O, est ODN parallèle à MC et coupant AB en D : menant CN perpendiculaire à MC, NZ parallèle à OC, le point Z est le centre de courbure de l'enveloppe. Mais on a évidemment $OD = CM$, $DN = CM$, donc $ON = CZ = 2OD$, $MZ = R = 3OD$, théorème connu.

Exercices.

1. Dans le mouvement d'une figure plane, le lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle, à un instant quelconque, est le cercle décrit sur le diamètre CI, porté du point C sur la direction de la vitesse du point C, et de longueur égale à $\omega^2 : \frac{d\omega}{dt}$.

2. Centre de courbure de la conchoïde de Nicomède (Chap. IV, ex. 2).

3. Un côté SC d'un angle droit roule sur un cercle O; l'autre côté SM est égal au

rayon du cercle : le point M décrit une spirale d'Archimède. Trouver la normale et le centre de courbure.

R. Le centre instantané est en C; MC est la normale. On applique la construction de Savary, le point O′ est ici à l'infini sur OC.

4. L'enveloppe d'une droite quelconque de la figure mobile a son centre de courbure sur une circonférence, décrite sur CK′ comme diamètre, K′ étant symétrique du point K par rapport au centre instantané.

R. Conséquence de la formule (5) où l'on fait $u = \infty$, et du théorème du n° **43**.

5. Trouver le centre de courbure de l'ellipse, considérée comme enveloppe d'un côté d'un angle droit dont le sommet parcourt une circonférence, l'autre côté passant par un point fixe (foyer).

6. Une droite ABM passe par un point fixe A; un de ses points B parcourt une circonférence O passant par A; BM est constant. Trouver la normale et le centre de courbure de la trajectoire du point M (*Limaçon de Pascal*); déterminer les courbes de roulement.

R. Le centre instantané C est à l'extrémité du diamètre BO; le point K s'obtient en prolongeant BC d'une longueur CK = CB. Le lieu du centre instantané dans le plan est le cercle O; dans la figure mobile, c'est un cercle de centre B et de rayon BC. Appliquer la construction de Savary.

7. Soient M, M_1, M_2 les sommets d'un triangle invariable qui se meut dans son plan. On a la relation

$$\frac{\sin(u_1,u_2)}{\frac{1}{u}+\frac{1}{\zeta}}+\frac{\sin(u_2,u)}{\frac{1}{u_1}+\frac{1}{\zeta_1}}+\frac{\sin(u,u_1)}{\frac{1}{u_2}+\frac{1}{\zeta_2}}=0,$$

les indices indiquant les points auxquels se rapportent les segments u, ζ.

8. Trouver le centre de courbure de l'enveloppe d'une droite MM_1, menée par un point quelconque M d'une courbe donnée et faisant un angle constant avec la normale MC à cette courbe.

R. On considère le côté MC de l'angle invariable comme roulant sur la développée de la courbe donnée : le centre de courbure C de la courbe est le centre instantané de rotation, sa projection M_1 sur la droite MM_1 est le point où celle-ci touche son enveloppe; soit X le centre de courbure de la développée en C; sa projection Z sur CM_1 est le centre de courbure demandé.

9. Un triangle ABC se meut de telle manière que ses deux côtés b, c, restent tangents à deux courbes données; trouver le centre de courbure de la courbe décrite par le sommet A, et celui de la courbe enveloppée par le côté a.

10. Le lieu des centres de courbure des trajectoires des différents points d'une même droite, à un même instant, est une section conique passant au centre instantané et tangente en ce point aux courbes de roulement. La section conique est une ellipse, si la droite est extérieure au cercle de diamètre CK; une hyperbole si elle le coupe; une parabole si elle lui est tangente.

11. Le lieu des points dont les trajectoires ont leurs centres de courbure sur une même droite est une section conique passant par le centre instantané.

CHAPITRE VIII.

DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT RELATIF.

45. Cherchons les relations qui existent, dans le mouvement relatif d'un point M par rapport à un système de comparaison $O'\xi\eta\zeta$, entre *l'accélération absolue*, *l'accélération relative*, et *l'accélération d'entraînement*, qui n'est autre chose que l'accélération du point mobile considéré comme lié au système de comparaison.

Pour cela, reprenons les équations et les notations du chapitre II, et faisons d'abord une remarque importante.

Dans l'équation

$$(1)\quad \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt}\right) + \left(a\frac{d\xi}{dt} + b\frac{d\eta}{dt} + c\frac{d\zeta}{dt}\right),$$

le premier groupe du second membre représente la vitesse d'entraînement, projetée sur OX, en sorte que

$$v''_x = \frac{dx_1}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt}.$$

Mais le mouvement du système de comparaison $O'\xi\eta\zeta$, à l'instant considéré, résulte d'une translation égale et parallèle à la vitesse du point O', et d'une rotation autour d'un axe instantané O'R (**33**); et comme $\frac{dx_1}{dt}$ représente la projection sur OX de la vitesse de translation, il est clair que l'expression

$$(2)\quad \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt} + \zeta\frac{dc}{dt}$$

donne la projection sur OX de la vitesse du point (ξ, η, ζ) supposé lié au système, due à la rotation de ce système autour de l'axe instantané O'R.

Une remarque analogue s'applique aux termes qui composent les deux autres projections v''_y, v''_z de la vitesse d'entraînement.

Cela admis, différentions l'équation (1) par rapport au temps; il viendra

$$(3)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + \xi\frac{d^2a}{dt^2} + \eta\frac{d^2b}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c}{dt^2}\right) + \left(a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + c\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc}{dt}\right).$$

Le premier membre est la composante parallèle à OX de l'accélération absolue j. Dans le second membre, le premier groupe de termes, auquel se réduirait ce second membre si ξ, η, ζ étaient indépendants du temps, c'est-à-dire si M était lié au système de comparaison, représente évidemment la projection sur OX de l'accélération d'entraînement j''. Le second groupe exprime la composante parallèle à OX de l'accélération relative j', car $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ sont les composantes de cette accélération suivant $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$, et a, b, c, les cosinus des angles respectifs que font ces axes avec OX. Enfin, nous considérons le troisième groupe comme représentant la projection sur OX d'une troisième accélération j''', dont nous déterminerons plus loin la valeur et la direction, et que nous nommons *accélération centripète composée*. L'équation (3) prend donc la forme

$$j_x = j'_x + j''_x + j'''_x, \tag{4}$$

et les valeurs de v_y, v_z, différentiées, donneront deux relations semblables pour les axes OY, OZ. D'où il suit, évidemment, que l'accélération j est la résultante des accélérations j', j'', j'''. Donc

Lorsque le mouvement d'un point M *est rapporté à un système fixe et à un système de comparaison mobile, son accélération absolue est la résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement, et de l'accélération centripète composée.*

Déterminons cette dernière, dont les composantes parallèles aux axes fixes sont

$$\begin{cases} j'''_x = 2\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{da}{dt} + \dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{db}{dt} + \dfrac{d\zeta}{dt}\dfrac{dc}{dt}\right), \\ j'''_y = 2\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{da'}{dt} + \dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{db'}{dt} + \dfrac{d\zeta}{dt}\dfrac{dc'}{dt}\right), \\ j'''_z = 2\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{da''}{dt} + \dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{db''}{dt} + \dfrac{d\zeta}{dt}\dfrac{dc''}{dt}\right). \end{cases}$$



Menons la droite MV', qui représente la vitesse relative du point M, et la droite MR', représentant l'axe instantané de rotation du système de comparaison relatif au point M, axe qui est comme on l'a vu, égal et parallèle à O'R (**33**). Les projections de MV' sur les axes mobiles, ou les coordonnées du point V' par

rapport à l'origine M, étant

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt},$$

il résulte évidemment, de la remarque faite plus haut sur l'expression (2), que

$$\frac{d\xi}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc}{dt} = \frac{1}{2}j_x'''$$

représente la composante parallèle à OX de la vitesse du point V', supposé lié invariablement au système de comparaison, due à la rotation de ce système autour de l'axe instantané MR'. On verrait de même que

$$\frac{1}{2}j_y''', \qquad \frac{1}{2}j_z'''$$

sont égaux, respectivement, aux composantes de cette même vitesse parallèlement à OY, OZ, en sorte que cette vitesse du point V' a même direction que l'accélération j''' et en vaut la moitié. On peut donc dire que *si l'on mène du point* M *une droite* MJ''' *parallèle à la vitesse qu'aurait, dans la rotation du système de comparaison autour de l'axe instantané relatif au point* M, *l'extrémité* V' *de la droite qui figure la vitesse relative, et double de cette vitesse, la droite* MJ''' *représentera ce que nous avons appelé l'accélération centripète composée.*

D'après cela, soit ω la vitesse angulaire de la rotation instantanée MR' ou O'R, θ l'angle que fait MV' avec l'axe instantané MR'; on aura évidemment

$$j''' = 2\omega v' \sin\theta;$$

de plus, la direction de j''' est évidemment perpendiculaire à celles de la vitesse relative MV' et de l'axe instantané MR' : elle est d'ailleurs définie avec précision par le théorème ci-dessus.

46. Les équations qui nous ont conduit à la loi de composition des accélérations, étant écrites sous la forme suivante :

$$j_x' = j_x - j_x'' - j_x''', \text{ etc.},$$

permettent de déduire l'accélération relative de l'accélération absolue. Il faut observer que $-j_x'''$, $-j_y'''$, etc., sont les composantes d'une accélération égale et directement opposée à l'accélération centripète j''', et que, pour cette raison, l'on appelle *accélération centrifuge composée*. Donc, *l'accélération dans le mouvement relatif d'un point est la résultante*

de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, et de l'accélération centrifuge composée.

47. Le plus souvent, on a besoin d'exprimer les composantes de l'accélération relative, non parallélement aux axes fixes OX, OY, OZ, mais parallélement aux axes mobiles $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$. Le théorème précédent fournit immédiatement l'équation

$$j'_\xi = j_\xi - j''_\xi - j'''_\xi,$$

et deux autres semblables. Or, si p, q, r désignent les composantes de l'axe instantané MR' ou O'R parallélement aux axes mobiles, comme les projections de MV' sur ces mêmes axes sont les dérivées de ξ, η, ζ par rapport au temps, il suit des formules qui expriment la vitesse d'un point dans la rotation autour d'un axe que

$$q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}$$

sera la composante, parallélement à $O'\xi$, de la vitesse du point V' due à la rotation MR' du système de comparaison. Donc, en vertu du théorème énoncé plus haut, nous aurons

$$j'''_\xi = 2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right),$$

et de même pour les composantes parallèles à $O'\eta$, $O'\zeta$. De là les équations importantes

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} j'_\xi &= j_\xi - j''_\xi - 2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right),\\ j'_\eta &= j_\eta - j''_\eta - 2\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right),\\ j'_\zeta &= j_\zeta - j''_\zeta - 2\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right).\end{aligned}\right.$$

48. *Cas particuliers :* 1° Si le système de comparaison possède un simple mouvement de translation continue, la rotation instantanée ω est constamment nulle, a, b, c,... sont des constantes, d'où il suit que l'accélération centrifuge composée se réduit à zéro. De plus, tous les points du système de comparaison ayant le même mouvement, l'accélération d'entraînement j'' a la même valeur et la même direction, quelle que soit la position actuelle du point M par rapport au système $O'\xi\eta\zeta$: elle est égale

et parallèle à l'accélération de l'origine O′ au même instant. De là ce théorème :

Quand le système de comparaison se meut d'un simple mouvement de translation, l'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue et d'une accélération égale, parallèle et de sens contraire à celle de l'origine des axes mobiles.

2° Si, de plus, le mouvement de l'origine mobile est rectiligne et uniforme, l'accélération de ce point est nulle, donc l'accélération relative et l'accélération absolue ont même valeur et même direction.

Exercices.

1. La spirale d'Archimède, $r = a\theta$, étant décrite par un point qui se meut uniformément sur le rayon a, pendant que ce dernier tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour du pôle (Ch. II, n° 14), déterminer l'accélération du point mobile et en déduire le rayon de courbure de la spirale.

R. On trouve $v = \omega\sqrt{a^2 + r^2}$ pour la vitesse du point; j' est nul; $j'' = \omega^2 r$ est dirigé vers le pôle; $j''' = 2\omega^2 a$ est normal au rayon r dans le sens de la rotation. Donc $j = \omega^2\sqrt{r^2 + 4a^2}$. On tire ensuite, de la valeur de j_n,

$$R = \frac{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2a^2}.$$

2. Déterminer l'accélération relative d'un point mobile à la surface de la terre.

R. Prenons le point mobile M pour origine, Mζ suivant la verticale, Mξ tangent au méridien et dirigé vers le nord, Mη tangent au parallèle et dirigé vers l'est. Soient ω la vitesse de la rotation terrestre, R la distance du point M au centre de la terre, λ la latitude du point M; l'axe de rotation de la terre étant dirigé vers le pôle sud, on a

$$p = -\omega\cos\lambda, \quad q = o, \quad r = -\omega\sin\lambda,$$

et l'on trouve

$$\left\{\begin{aligned} j'_\xi &= j_\xi - \omega^2 R\sin\lambda\cos\lambda - 2\omega\sin\lambda\cdot v'_\eta. \\ j'_\eta &= j_\eta + 2\omega(\sin\lambda\cdot v'_\xi - \cos\lambda\cdot v'_\zeta). \\ j'_\zeta &= j_\zeta + \omega^2 R\cos^2\lambda + 2\omega\cos\lambda\cdot v'_\eta. \end{aligned}\right.$$

Exercices sur la cinématique en général.

1. Démontrer, par des considérations cinématiques, que si l'on projette un pôle O sur la tangente en M à une courbe (C), si p, φ sont les coordonnées polaires de la projection, la distance du point O à la normale en M et le rayon de courbure en ce point M, ont pour expressions

$$\frac{dp}{d\varphi}, \quad p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}.$$

2. Une droite reste tangente à une courbe donnée (A), et coupe deux autres courbes (C), (C′) en des points M, M′; N, N′ sont les rencontres des normales en ces points avec la normale à (A) au point de contact O; r, r' les distances des points M et M′ à ce point de contact, $d\theta$ le déplacement angulaire infiniment petit de la droite mobile, ρ le rayon de courbure de (A) au point O, ds, ds' les éléments de (C), (C′). On a



$$\mathrm{ON} = \frac{dr}{d\theta} - \rho, \quad d.\,\mathrm{MM'} = \mathrm{NN'}\,d\theta, \quad \frac{ds}{ds'} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{M'N'}}.$$

— Considérations de mouvements relatifs

3. On connaît l'équation $p = f(\varphi)$ d'une courbe (C) (voir ex. I); la courbe (C) roule sur une droite AX : trouver l'équation de la roulette décrite par le point O dans ce mouvement.

R. Soit AX l'axe des x, l'axe des y perpendiculaire; on aura

$$y = p = f(\varphi), \qquad x = \int_0^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi.$$

4. Application. Démontrer que le foyer d'une parabole roulant sur une droite décrit une chaînette.

5. Si l'on place au sommet d'une parabole le pôle d'une spirale d'Archimède, dont le paramètre soit moitié de celui de la parabole, et qu'on fasse rouler intérieurement la spirale sur la parabole, son pôle décrira une ligne droite, axe de la parabole.

6. La longueur de l'arc décrit par un point M, dans le mouvement d'une figure plane, est à celle de l'arc correspondant de la podaire de la courbe roulante par rapport au point M, comme $R_1 + R_2$ est à R_1 (N° 42). Si la courbe fixe se réduit à une droite, ces arcs correspondants sont égaux.

7. Une courbe (A) roule sur une droite (D) en entraînant une courbe (B) : un point M se meut sur (B) de sorte que sa vitesse relative, à chaque instant, soit parallèle à (D); l'arc qu'il décrit dans le plan est égal à l'arc correspondant de la courbe, lieu de la projection, sur la tangente à (A), du point de (B) où la tangente a même direction.

8. L'enveloppe d'un arc quelconque de (B) est égal à la demi-somme de cet arc et de l'arc correspondant du lieu, obtenu en abaissant une perpendiculaire du point de contact sur la tangente à (A), et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur égale.

9. Une courbe (B) tourne autour d'un point fixe A; un point M se meut sur (B) de sorte que sa vitesse relative ait une direction constante; l'arc décrit par M a même longueur que l'arc correspondant du lieu des projections du point A sur les normales à la courbe (B).

N. B. On trouvera ces théorèmes et d'autres, déduits de propriétés plus générales, dans un beau mémoire de M. A. Mannheim, *sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes* (*J. de l'Éc. Polyt.*, XLe cahier).

10. Un système articulé, composé de deux côtés opposés AB, CD d'un carré et de la diagonale AD, est mobile autour des sommets B, C considérés comme pivots fixes. Démontrer que le milieu M de la diagonale mobile décrit une lemniscate de

Bernoulli (1) : construire la normale et le centre de courbure de cette courbe. Déterminer le lieu du centre instantané dans le plan et dans la figure mobile.

11. *Système articulé de Peaucellier.* — Quatre tiges de longueur égale AD, AD′, CD, CD′, forment un losange articulé; les sommets D et D′ sont reliés par des brides égales DB, D′B à un pivot fixe B. Démontrer 1° que les points A, B, C sont toujours en ligne droite; 2° que le produit AB × BC reste constant; 3° que si le point A décrit un cercle passant par le point B, le sommet C décrira une droite perpendiculaire au diamètre passant par B. Étant donnée la vitesse angulaire constante de la barre BD autour du pivot B, déterminer en grandeur et en direction, par des considérations cinématiques, les vitesses des différents sommets, le centre instantané de rotation de chacune des barres, la trajectoire décrite par un point quelconque du système articulé, etc.

12. *Système articulé de Hart.* — Un système articulé ABCD est formé des côtés et des diagonales d'un trapèze isocèle. Démontrer 1° que si l'on fixe le côté AB, un point quelconque du côté CD décrit une inverse de conique ; 2° que si l'on fixe un point O du côté AB, et si l'on mène la droite OPP′ parallèle aux bases AC, BD, les trois points O, P, P′ restent constamment sur une même droite, et l'on a OP · OP′ = *const*; d'où il suit que si l'on oblige le point P à décrire une circonférence passant par le point O, le point P′ décrira une droite perpendiculaire au diamètre passant en O; 3° Étant donnée la vitesse angulaire du côté AB autour du point O, construire les vitesses des points C, D, P, P′, les centres instantanés de rotation des côtés du système, etc.



(1) Cet élégant théorème est dû au P. Carbonnelle.

LIVRE DEUXIÈME.

STATIQUE.

CHAPITRE IX.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE.

49. Nous appelons *corps* des portions de matière limitées en tous sens. Nous regardons les corps comme des aggrégations de particules très-petites, dont le nombre est extrêmement grand, toutes isolées les unes des autres : ce sont les *molécules*. Les molécules elles-mêmes sont composées d'un certain nombre d'éléments matériels que nous regarderons comme *inétendus*, comme de simples points géométriques dans chacun desquels réside un centre d'action de la matière : ce sont les *points matériels*. En définitive, les corps se réduisent à des assemblages d'un nombre incalculable de points matériels.

Les principes premiers de la mécanique, sur lesquels reposent les relations qui existent entre les mouvements des corps et les actions, émanant d'autres corps, auxquelles nous attribuons ces mouvements comme à leur cause immédiate, sont empruntés à l'expérience et peuvent se réduire à trois. Des observations mille fois répétées, des expériences instituées en vue de vérifier ces principes, des inductions simples et naturelles ont conduit peu à peu à admettre leur généralité absolue, et comme les conséquences sans nombre que l'on en a déduites par le calcul

se sont toujours vérifiées, on est fondé à les regarder comme entièrement hors de doute. A la vérité, ce n'est d'abord que sur des mouvements rapportés à la terre comme immobile que les observations ont pu être faites, et c'est par induction qu'on a étendu à tous les mouvements les lois auxquelles ces observations avaient conduit. Mais, cette généralisation faite, on a reconnu entre les conséquences auxquelles conduisaient les lois fondamentales, et les faits observés, même à la surface de la terre, de légères discordances, qui s'effaçaient de plus en plus à mesure que le système auquel on rapportait les mouvements, et que l'on regardait comme immobile, approchait de se confondre avec le système le plus vaste que nous connaissions dans l'univers, celui des étoiles fixes. C'est ainsi que l'on a été conduit à attribuer l'immobilité à ce système; c'est à lui que nous rapporterons par la suite les mouvements *absolus*, et c'est dans ces mouvements seulement que les principes que nous allons énoncer auront leur pleine signification et leur entière exactitude.

50. I. Principe de l'inertie. — *Un point matériel est incapable de modifier par lui-même la vitesse dont il est animé, et il a besoin pour cela de l'action d'une cause extérieure à lui.*

Si donc il est en repos, il y restera indéfiniment; s'il est en mouvement, il aura un mouvement rectiligne et uniforme, tant qu'une action étrangère ne viendra pas le tirer du repos ou changer la direction et la grandeur de sa vitesse. Cette cause capable d'engendrer ou de modifier le mouvement d'un point matériel, quelle que soit sa nature intime, nous l'appelons une *force*. Il n'arrive pas toujours que son effet soit un mouvement, parce que d'autres causes, ou des forces semblables, peuvent s'opposer au mouvement qu'elle tend à produire. Néanmoins, nous concevons que dans cette circonstance la force ne cesse pas d'agir, de solliciter la matière au mouvement : le sentiment de l'effort que nous déployons pour mettre les corps en mouvement, pour vaincre un obstacle quelconque, nous donne une idée très-nette de la force considérée ainsi abstraction faite du mouvement qu'elle est capable de produire, et nous rangerons cette notion parmi celles que nous possédons *a priori*.

Il faut observer que le principe de l'inertie ne signifie nullement que les derniers éléments matériels soient incapables d'aucune action : au contraire, nous serons amenés à attribuer l'ensemble des phénomènes mécaniques à des actions réciproques des points matériels les uns sur les autres. Nous voulons dire seulement que le point matériel est sans action

sur son propre mouvement, et que celui-ci ne peut être modifié que par la présence et l'action d'autres points matériels.

51. La notion de la force, réduite à ce qu'elle a d'essentiel, implique trois éléments : le point matériel sur lequel elle s'exerce, et que l'on nomme son *point d'application;* la direction de la droite suivant laquelle elle tend à déplacer son point d'application, supposé libre et en repos : c'est ce que l'on nomme la *direction de la force;* enfin, son *intensité*, ou la façon plus ou moins énergique dont elle agit pour transporter son point d'application. La représentation géométrique et analytique des deux premiers éléments n'offre aucune particularité nouvelle, mais quant à l'intensité, nous aurons besoin, pour la mesurer, de poser les principes de la comparaison des forces entr'elles. Nous nous bornons, pour le moment, à admettre comme évident que deux forces qui, agissant successivement sur un même point matériel, lui communiquent exactement le même mouvement, sont égales entr'elles.

52. II. Principe de l'indépendance des mouvements. — *Si un point matériel* M *animé d'une certaine vitesse et soumis à l'action de certaines forces* F, F'...., *vient à être sollicité par une force nouvelle* P, *le mouvement relatif qu'il prendra, par rapport à un système de comparaison animé d'un mouvement de translation égal au mouvement qu'aurait eu le point* M *sans l'intervention de la force* P, *sera précisément le même que si la translation commune n'existait pas, et que la force* P *seule agisse sur le point* M.

Ainsi, un corps lancé d'un waggon marchant avec une vitesse considérable, dans une direction perpendiculaire à la voie, tombe, non au point vers lequel on l'a lancé, mais en un point plus rapproché de celui vers lequel marche le waggon ; son mouvement par rapport au waggon est sensiblement indépendant de leur mouvement commun, et le même que si le waggon et le corps étant en repos, on appliquait à celui-ci la même force.

La première conséquence que nous déduisons de ce principe, c'est que la vitesse dont un point matériel M est animé à un instant quelconque n'influe en aucune manière sur les changements que cette vitesse éprouve, à partir de cet instant, par l'action des forces qui lui sont appliquées. En effet, concevons un système d'axes rectangulaires emporté par une translation égale et parallèle à la vitesse que possède le point M à l'époque t. Le mouvement relatif que les forces motrices imprimeront au point M à

partir de cet instant, par rapport à ce système mobile, sera, d'après le principe, identique au mouvement qu'elles donneraient au même point, supposé en repos, par rapport aux mêmes axes supposés immobiles. Ce mouvement ne dépend donc pas de la vitesse acquise à l'instant t; il en est donc de même des accroissements des composantes de la vitesse parallèlement aux axes, accroissements qui se confondent ici avec les composantes de la vitesse relative.

53. Appliquons ce qui précède à une force constante. Une force est *constante* pendant un temps donné, lorsque, pendant la durée dont il s'agit, sa direction ne change pas, et que l'intensité de son action sur le point matériel reste constamment égale à elle-même. Soit P une telle force, de direction AX, appliquée à un point libre et en repos placé en A : il est clair d'abord qu'elle produira un mouvement rectiligne suivant AX. De plus, si à une époque t la vitesse est v, cette vitesse croîtra d'une quantité Δv pendant un temps Δt compté à partir de l'époque t, et, d'après la remarque faite plus haut, Δv sera égal à la vitesse que la force P communiquerait au mobile partant du repos, dans le même temps Δt. Or, la force P étant constante, cette quantité Δv est toujours la même pour un même Δt, quelle que soit l'époque t; la vitesse croît de quantités égales dans des temps égaux : le mouvement est donc uniformément varié. Ainsi *toute force constante imprime à un point matériel en repos un mouvement rectiligne uniformément varié.*

Cette conséquence subsisterait complètement si le point M, au lieu d'être primitivement en repos, avait déjà une vitesse déterminée suivant AX, puisque les accroissements de la vitesse seraient toujours indépendants de la vitesse antérieurement acquise. Mais, suivant que cette vitesse initiale serait dirigée dans le sens où la force agit ou en sens contraire, celle-ci aurait pour effet d'augmenter la vitesse ou de la diminuer.

Réciproquement, un point matériel animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié est sollicité par une force qui, nécessairement, est constante, puisqu'elle ferait acquérir au point en repos une même vitesse au bout d'un même temps, quel que soit l'instant de son action que l'on considère.

Soient maintenant deux forces constantes P, P′, appliquées à un même point M suivant une même direction AX. La force P agissant seule, produirait un mouvement uniformément varié suivant AX, avec une accélé-

ration j. Soit, de même, j' l'accélération constante qui résulterait de l'action de la force P′ seule. D'après le principe II, si les forces P, P′ agissent simultanément, le mouvement du point M se composera d'une translation d'*entraînement* avec une accélération j suivant AX, et d'une translation *relative* suivant la même droite avec une accélération j'. Donc, d'après la loi de composition des accélérations (**48**), l'accélération totale du point M sera dirigée suivant AX, et égale à $j + j'$: le point M aura encore un mouvement uniformément varié. Or, nous concevons qu'il existe nécessairement une force constante R capable, à elle seule, d'imprimer au point M suivant AX la même accélération constante $j + j'$: nous dirons, par définition, que cette force R est la *somme* des deux forces P et P′. Si les forces P, P′ étaient égales, les accélérations j, j' le seraient aussi, l'accélération totale serait $2j$, et la force R serait *double* de la force P. Une force serait *triple* de P si elle communiquait au point libre M, suivant la direction AX, une accélération $3j$ triple de l'accélération due à l'action d'une seule force P, et ainsi de suite. On voit donc ce que seraient deux forces constantes P et R dont le rapport serait exprimé par un nombre entier n, par une fraction $m : n$, par un nombre incommensurable p. Il suffira donc de choisir pour unité une force bien déterminée : l'*intensité* d'une force quelconque sera représentée par le nombre qui mesure son rapport à l'intensité de la force choisie pour unité. Enfin, toute force se représentera *géométriquement* par une droite, menée à partir du point d'application dans la direction de la force, et ayant une longueur proportionnelle à l'intensité de celle-ci.

54. Il résulte de ce qui précède que *des forces constantes, agissant successivement sur un même point matériel, sont proportionnelles aux accélérations qu'elles lui communiquent*. En sorte que si P, P′,... désignent les nombres qui mesurent les intensités de ces forces; j, j'... les accélérations constantes correspondantes, on aura

$$\frac{P}{j} = \frac{P'}{j'} = \dots\dots$$

Mais ce rapport P : j, constant pour un même point matériel, varie d'un point matériel à un autre; c'est ce que l'expérience nous apprend. Le rapport P : j affecte donc pour chaque élément de la matière une valeur caractéristique : on lui donne le nom de *masse* du point matériel, et la *masse d'un corps quelconque* est la somme des masses de tous les

points matériels qui le composent. D'où il suit qu'en désignant par m la masse du point considéré, on aura

$$\frac{P}{j} = m, \quad P = mj,$$

c'est-à-dire qu'*une force constante est mesurée par la masse du point matériel auquel elle est appliquée, multipliée par l'accélération qu'elle lui communique.*

Nous expliquerons plus loin comment on évalue en pratique les masses des corps et les intensités des forces; observons seulement ici qu'il n'y a pas lieu de fixer une unité de masse, la masse étant simplement le rapport des deux nombres qui représentent la force et l'accélération.

55. Cherchons actuellement à déterminer la direction et l'intensité, à une époque quelconque t, de la force incessamment variable P qui communique à un point matériel M un mouvement curviligne quelconque.

D'après les conséquences déduites du principe de l'indépendance des mouvements au n° **52**, la vitesse que le point M, supposé en repos à l'époque t, acquerrait au bout d'un temps infiniment petit Δt sous l'action de la force variable P que l'on considère, coïncide en grandeur et en direction avec la vitesse *relative* dont le point M est animé à l'époque $t + \Delta t$ dans son mouvement réel, par rapport à un système doué d'une translation égale à la vitesse MV qu'a le point M à l'époque t; c'est-à-dire avec l'accélération élémentaire VV_1 du point M, comme il est facile de le voir d'après le n° **36**. Si cette vitesse VV_1 était produite par une force constante P′, la direction de cette force serait celle de VV_1, et son intensité serait mesurée (**54**) par la masse m du point multipliée par l'accélération constante de ce mouvement, c'est-à-dire, d'après ce que nous avons expliqué du mouvement uniformément varié (**38**), par

$$m \frac{VV_1}{\Delta t}.$$

Or, Δt étant infiniment petit, on doit admettre que la direction et l'intensité de cette force constante P′ ont respectivement pour limites la direction et l'intensité, à l'époque t, de la force variable P que nous considérons (1). Mais la direction VV_1, à la limite, est celle de l'accélération

(1) Peut-être même devrait-on, à la rigueur, regarder ceci comme une espèce de définition, et comme étant la seule manière de nous faire une idée nette de ce qu'il faut entendre par la direction et l'intensité, à un instant déterminé, d'une force qui varie incessamment.

MJ du point mobile à l'époque t, et le rapport $\frac{VV_1}{\Delta t}$ a pour limite cette accélération j elle-même. Donc nous pouvons énoncer le théorème suivant : *Lorsqu'un point matériel libre a un mouvement curviligne quelconque, la force qui le sollicite, à chaque instant, a pour direction celle de l'accélération du point mobile ; son intensité est mesurée par le produit de la masse du point par l'accélération qu'il possède à cet instant.* En sorte que, X, Y, Z étant les composantes de la force P parallèlement aux axes, nous aurons les équations

$$(1) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

56. Si deux forces égales P sont appliquées à un même point M en repos dans des directions diamétralement opposées, l'accélération totale communiquée à ce point, d'après le principe de l'indépendance des mouvements, sera la somme algébrique de l'accélération relative due à l'une des forces et de l'accélération d'entraînement due à l'autre, et ces accélérations étant égales et de signes contraires, l'accélération totale sera nulle et le point restera en repos. Donc, deux forces égales et opposées agissant simultanément sur un même point matériel, s'annulent réciproquement; si le point M avait d'abord un certain mouvement, ce mouvement ne sera pas modifié par l'intervention des forces P. On dit, dans ce cas, que les forces *se font équilibre*, ou que le point M *est en équilibre* sous l'action de ces forces. Il est clair que l'on peut, sans rien changer à l'état de repos ou de mouvement d'un corps, appliquer en un de ses points, ou en un nombre quelconque de ses points, des groupes de forces deux-à-deux égales et directement opposées. C'est ce que nous ferons souvent pour la facilité des démonstrations.

Cette propriété de deux forces égales et opposées de n'imprimer aucun mouvement à un point matériel en repos fournit le moyen le plus commode d'évaluer les intensités des forces. Au lieu de comparer les forces par les accélérations qu'elles communiquent à une même masse, on les rapporte à une force bien connue en cherchant combien il faut réunir de celles-ci pour faire équilibre à la première. Nous verrons plus loin que cette force *type* à laquelle on rapporte toutes les autres est la pesanteur, mais pour avoir une idée nette des procédés employés dans cette comparaison, il sera nécessaire de connaître les lois de la combinaison des forces et celles de leur équilibre.

57. III. Principe de la réaction. — *Toutes les fois qu'un point matériel* A *exerce sur un autre point matériel* B *une action quelconque, réciproquement, le point* B *exerce sur le point* A *une action égale et directement opposée.* Cette seconde force se nomme la *réaction* du point B : l'action et la réaction sont donc dirigées suivant la droite qui passe par les points A et B, mais il importe d'observer qu'*elles n'agissent pas sur le même point.*

L'expérience montre que, si nous mettons un corps en mouvement en le poussant ou en le tirant, même s'il est parfaitement libre, nous éprouvons une sensation de résistance ; si la traction est exercée par un fil élastique, l'allongement du lien montre bien qu'il est sollicité à ses extrémités par deux forces de sens contraire, et égales entr'elles. Dans les mouvements célestes attribués à l'attraction, nous trouvons que celle-ci est toujours réciproque et égale entre deux corps ; etc.... En un mot, toutes les conséquences que l'on déduit de ce principe se vérifiant constamment, nous devons le regarder comme parfaitement établi.

Des trois principes que nous venons de poser, nous pourrons déduire, par le raisonnement et le calcul, toutes les lois du mouvement ou de l'équilibre des corps sous l'influence de forces données qui leur sont appliquées. Le problème de l'équilibre étant le plus simple, et présentant d'ailleurs une importance très-grande, nous traiterons en premier lieu de celui-là : sa solution forme l'objet de la *statique.*

CHAPITRE X.

RÉDUCTION ET ÉQUILIBRE DES FORCES AGISSANT SUR UN MÊME POINT.

58. Considérons en premier lieu un point libre M sur lequel agissent simultanément deux forces P et P′.

D'après le principe de l'indépendance, si l'on conçoit un système de comparaison doué d'un mouvement de translation égal à celui que la seule force P donnerait au point M, le mouvement relatif du point M par rapport à ce système sera dû uniquement à l'action de la force P′. Son accélération totale J à chaque instant sera donc la résultante des accéléra-

tions j et j', correspondantes aux forces P et P' considérées isolément. Mais on a vu (**55**) qu'une force unique R, ayant pour direction celle de l'accélération totale J et pour intensité le produit mJ de la masse du point par son accélération, lui imprimerait exactement ce même mouvement qu'il tient des forces P et P'; la force R peut donc remplacer les forces P et P'.



D'autre part, les forces P, P', R étant dirigées respectivement suivant les accélérations j, j', J et proportionnelles à ces accélérations, les droites MP, MP', MR qui représentent ces forces en grandeur et en direction forment entr'elles une figure semblable à celle que forment les droites qui figurent ces accélérations j, j', J : donc MR est la résultante de MP, MP'. De là le théorème connu sous le nom de *parallélogramme des forces : Deux forces* P, P' *agissant simultanément sur un même point matériel libre, sont réductibles à une seule, et si l'on construit un parallélogramme sur les droites qui représentent les forces* P *et* P', *la diagonale représentera, en grandeur et en direction, la force* R *équivalente aux deux premières.*

L'utilité de ce théorème et ceux que nous en déduirons consiste en ce que, au lieu de composer les mouvements que les points ou les systèmes prennent sous l'influence de diverses forces, nous pourrons réduire d'abord ces forces à un système plus simple et en déduire ensuite plus facilement le mouvement.

Corollaires. 1° Le triangle MPR, où PR = MP' et où MPR = 180° — PMP', MRP = P'MR, nous donne

$$\frac{P}{\sin(P', R)} = \frac{P'}{\sin(P, R)} = \frac{R}{\sin(P, P')},$$

$$R^2 = P^2 + P'^2 + 2PP' \cos(P, P').$$

Ces équations font connaitre R et l'angle (P, R), si P, P', et l'angle (P, P') sont donnés.

2° Réciproquement, une force donnée R peut toujours être remplacée, sans que son effet sur le point M soit changé, par deux autres forces de directions données MP, MP' : il suffira de décomposer suivant ces directions la droite MR qui représente la force R.

3° Lorsque les forces P, P' font un angle droit, on a

$$\sin(P, P') = 1, \quad \sin(P', R) = \cos(P, R),$$

$$P = R\cos(P, R), \quad P' = R\sin(P, R), \quad R^2 = P^2 + P'^2.$$

59. Supposons maintenant un nombre quelconque de forces P, P′,... appliquées à un même point libre M. Par le théorème ci-dessus, on remplacera d'abord les forces P, P′ par leur résultante Q; la force P″ et la force Q, d'après la même règle, seront réductibles à une seule force Q′, de sorte que les forces P, P′, P″ sont remplacées par leur résultante MQ′, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des forces P appliquées au point M. Donc, en général, *des forces* P, P′, P″,... *agissant simultanément sur un même point* M, *produisent le même effet qu'une force unique* R, *représentée en grandeur et en direction par la résultante des droites qui représentent les forces* P, P′,...

A raison de cette construction, la force R est dite la *résultante* des forces P, P′,... et celles-ci sont appelées les *composantes* de R.

En particulier, trois forces P, P′, P″ se réduisent à une seule, représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur ces forces.

Appliquons les propriétés des résultantes. Soient α, β, γ les angles directeurs d'une force P, par rapport à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ; les composantes X, Y, Z de cette force, parallèlement aux axes, auront pour expressions

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma,$$

et pourront, prises simultanément, remplacer P. Mais X étant positif ou négatif suivant que l'angle α est aigu ou obtus, nous conviendrons de regarder les forces X, Y, Z comme positives ou négatives suivant qu'elles agissent dans le sens des coordonnées positives ou en sens contraire, afin de donner à ces formules toute la généralité possible. Nous aurons donc

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{P}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{P}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{P}.$$

Ensuite, R désignant la résultante de forces P, P′, P″... appliquées en M; a, b, c les angles directeurs de R, nous aurons, par les formules des N° **3** et **4**,

$$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y, \quad R_z = \Sigma Z,$$

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}, \quad \cos a = \frac{\Sigma X}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \cos c = \frac{\Sigma Z}{R}.$$

Les composantes X, Y, Z d'une force quelconque P étant données par les relations ci-dessus, il s'ensuit que ces formules déterminent entièrement l'intensité et la direction de la résultante R.

Si les forces P, P′, P″,... agissaient suivant une même droite, les unes dans un sens, les autres en sens contraire, il suffirait de choisir cette droite pour axe des x, et d'étendre aux forces P et à la résultante R la convention de signes admise plus haut pour leurs composantes parallèles aux axes. Chacune des forces se réduisant alors à sa composante suivant l'axe des x, l'équation

$$R_x = \Sigma X$$

se réduira à celle-ci :

$$R = \Sigma P;$$

ainsi *la résultante sera égale, en intensité, à la somme algébrique des forces données, et le signe dont cette somme est affectée fera voir dans quel sens agit la force* R.

60. *Équilibre d'un point matériel libre.* — Lorsque des forces P, P′,... agissent simultanément sur un point M, il faut évidemment, pour que l'équilibre ait lieu, que leur résultante soit nulle; cette condition suffit d'ailleurs, puisqu'elle implique que la dernière force est égale et directement opposée à la résultante des autres, ce qui entraîne l'équilibre. Les équations nécessaires et suffisantes de l'équilibre des forces appliquées à un point libre sont donc

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

ou

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les forces P. On déduit de ces équations que, quand l'équilibre a lieu, chacune des forces est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, ce qui était d'ailleurs évident.

Cette remarque conduit à une expression commode des conditions d'équilibre, lorsque les forces P sont au nombre de trois. La force P″ étant égale et opposée à la résultante Q des forces P et P′, on a

$$P'' = Q, \quad (P, P'') = 180^\circ - (P, Q), \quad (P', P'') = 180^\circ - (P', Q),$$

et les relations du N° 58 (1°) donnent par substitution

$$\frac{P}{\sin(P', P'')} = \frac{P'}{\sin(P, P'')} = \frac{P''}{\sin(P, P')}.$$

Les conditions d'équilibre sont donc 1° *que les trois forces* P, P′, P″ *soient dirigées dans un même plan;* 2° *que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres.*

61. *Équilibre d'un point retenu sur une surface fixe.* — Le point M étant sollicité par des forces données, et ne pouvant se mouvoir que sur la surface S, produit sur celle-ci une pression déterminée : la surface, en vertu du troisième principe (**57**), exerce à son tour sur le point M une réaction égale et contraire. Nous regardons la surface comme *parfaitement polie*, c'est-à-dire comme ne pouvant exercer en un quelconque de ses points qu'une réaction dirigée suivant la normale à la surface en ce point. D'ailleurs, l'effet que la présence de la surface produit sur l'équilibre ou le mouvement du point se trouvant compris tout entier dans cette réaction, nous pouvons faire abstraction de la surface et traiter le point M comme entièrement libre, si nous joignons aux forces motrices qui agissent sur lui la réaction normale N de la surface. D'après cela, si X, Y, Z sont les composantes rectangulaires de la résultante des forces motrices; λ, μ, ν les angles directeurs de la normale à la surface en M, les conditions d'équilibre d'un point entièrement libre fournissent les égalités

$$(1)\qquad X + N\cos\lambda = 0,\quad Y + N\cos\mu = 0,\quad Z + N\cos\nu = 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées du point M, $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface, et posons

$$V = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}.$$

On a, comme on sait (Cours d'Analyse, **180**),

$$(2)\qquad \cos\lambda = \pm\frac{1}{V}\frac{dF}{dx},\quad \cos\mu = \pm\frac{1}{V}\frac{dF}{dy},\quad \cos\nu = \pm\frac{1}{V}\frac{dF}{dz},$$

et, par suite, les équations d'équilibre prennent la forme

$$X \pm \frac{N}{V}\frac{dF}{dx} = 0,\quad Y \pm \frac{N}{V}\frac{dF}{dy} = 0,\quad Z \pm \frac{N}{V}\frac{dF}{dz} = 0.$$

L'élimination du rapport N : V entre ces trois équations donne celles-ci :

$$(3)\qquad X\frac{dF}{dy} - Y\frac{dF}{dx} = 0,\quad X\frac{dF}{dz} - Z\frac{dF}{dx} = 0,$$

et ces égalités, nécessaires pour que l'équilibre ait lieu, sont aussi suffisantes : en effet, elles expriment que l'on peut satisfaire aux équations (1) moyennant une valeur convenable de N, et comme la réaction normale

de la surface est supposée pouvoir atteindre toutes les valeurs possibles, et remplacer une force quelconque, l'équilibre a lieu. Les égalités (3) expriment donc les conditions de l'équilibre d'un point assujetti à rester sur la surface $F(x, y, z) = 0$. Si ces équations sont vérifiées, on tirera des relations (1)

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

ce qui donnera la réaction de la surface et, par suite, la pression qu'elle supporte; enfin, l'équation

$$N \cos \lambda = -X$$

fera connaître le signe de $\cos \lambda$, et l'on saura ainsi dans quel sens est dirigée la pression sur la surface.

Dans certains cas, le point matériel M est simplement *appuyé* contre une surface résistante qu'il peut d'ailleurs quitter, mais à travers laquelle il ne peut pénétrer. Dans ces cas, la réaction N est nécessairement dirigée vers l'*extérieur*, les signes de $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ sont donc déterminés, et l'on doit choisir en conséquence un signe convenable dans les équations (2). Les équations (3) subsistent et expriment encore des conditions *nécessaires* de l'équilibre, mais il y en a une autre : il faut que le signe de $\cos \lambda$, tel qu'il se déduit de la première des équations (1), s'accorde avec celui qui résulte de l'hypothèse actuelle.

Dans les surfaces physiques, l'hypothèse qui nous a servi de point de départ n'est jamais parfaitement réalisée. Toujours la surface est capable de développer une certaine réaction tangentielle, un certain *frottement*, indépendamment de la réaction normale indéfinie que nous avons admise. On déterminera donc les conditions d'équilibre comme ci-dessus, mais en comprenant parmi les forces motrices une réaction tangentielle inconnue, qui ne pourra d'ailleurs dépasser une certaine limite donnée par l'expérience.

62. *Point matériel retenu sur une courbe fixe.* — La courbe est supposée sans frottement; sa réaction sur le point matériel M est donc perpendiculaire à la tangente en M, ou dirigée dans le plan normal. Joignant cette réaction normale N aux forces qui sollicitent le point M, et faisant abstraction de la courbe, on a encore les équations (1),

$$X + N \cos \lambda = 0, \quad Y + N \cos \mu = 0, \quad Z + N \cos \nu = 0.$$

Les cosinus directeurs de la tangente à la courbe étant proportionnels

aux différentielles dx, dy, dz des coordonnées de celle-ci, on a la relation

$$\cos\lambda \cdot dx + \cos\mu \cdot dy + \cos\nu \cdot dz = 0,$$

et de là, multipliant les équations (1) respectivement par dx, dy, dz et les ajoutant,

$$(4) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

C'est ici l'unique condition de l'équilibre, puisque, si elle est vérifiée, on pourra toujours déterminer N, λ, μ, ν de manière à satisfaire aux équations (1), et l'on connaîtra, en conséquence, la valeur et la direction, dans le plan normal, de la réaction N ou de la pression que le point M en équilibre exerce sur la courbe. Si les équations de la courbe sont données sous la forme

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0,$$

les différentielles dx, dy, dz vérifient les relations

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0,$$

$$\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz = 0,$$

et l'élimination de dx, dy, dz entre ces équations et l'équation (4) donnera l'équation d'équilibre sous la forme

$$0 = X\left(\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{df_1}{dy}\right) + Y\left(\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{df_1}{dz}\right) + Z\left(\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{df_1}{dx}\right).$$

On remarquera, comme plus haut, que les courbes matérielles produisent toujours un certain frottement, dont on tiendrait compte de la même manière.

Remarques. 1° Dans ce qui précède, comme dans les problèmes d'équilibre que nous traiterons par la suite, nous raisonnons habituellement comme si les points matériels auxquels sont appliquées les forces qui se font équilibre étaient en repos, mais cette supposition n'est nullement nécessaire et n'a aucune influence sur les conditions d'équilibre. En effet, d'après le 2me principe de la dynamique, l'état de repos ou de mouvement d'un point n'a aucune influence sur les modifications que sa vitesse subit par l'action des forces qui agissent sur lui, et par conséquent, les conditions pour que ces forces annulent réciproquement leurs effets sont les mêmes, quel que soit le mouvement du point, que si ce point était en repos.

2° La méthode employée pour ramener l'équilibre d'un point assujetti sur une surface ou sur une courbe, à l'équilibre d'un point entièrement libre, se nomme la méthode *des réactions* : elle est extrêmement féconde, et nous exposerons plus loin son application à des questions beaucoup plus générales.

Exercices.

1. Un point matériel M est sollicité par deux forces égales Q dirigées respectivement vers deux points fixes A et B ; la distance MA est donnée. Quelle force P faut-il appliquer au point M pour que, l'équilibre ayant lieu, la direction de la force P soit perpendiculaire au milieu de AB.

R. Soient $AB = 2a$, $MA = b$. On a $P = \frac{2Q}{b}\sqrt{b^2 - a^2}$.

2. Les sommets d'un triangle isocèle attirent un point matériel M placé sur la droite qui joint le sommet au milieu de la base, en raison inverse du carré de la distance et proportionnellement aux côtés respectivement opposés. Trouver la position d'équilibre du point M.

3. Un point M peut se mouvoir sans frottement sur une surface sphérique : il est soumis à n forces dirigées vers n points donnés, et proportionnelles aux distances respectives de ces points au point M. Déterminer la position d'équilibre et la pression sur la sphère.

R. Soient μ l'action à l'unité de distance ; x, y, z les coordonnées rectangulaires du point M, l'origine étant au centre O de la sphère ; a, b, c les coordonnées d'un quelconque des points donnés ; a_1, b_1, c_1 celles d'un point G déterminé par les équations

$$na_1 = \sum a, \quad nb_1 = \sum b, \quad nc_1 = \sum c,$$

(*centre des moyennes distances*). Les positions d'équilibre sont aux points où la droite OG perce la surface sphérique. Soient R le rayon, $\rho_1 = OG$, N la réaction de la surface. On a

$$N = \mu n (R \pm \rho_1).$$

4 Un point, placé sur la surface d'un ellipsoïde, est sollicité par trois forces, dirigées vers les trois sommets voisins A, B, C, proportionnelles aux distances, et en raison inverse des longueurs respectives des axes qui aboutissent à ces sommets. Déterminer la position d'équilibre sans frottement et la réaction N de la surface.

R. Soient a, b, c les demi-axes ; x, y, z les coordonnées de la position d'équilibre cherchée ; posons

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

On aura pour déterminer le point (x, y, z)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\theta}\right) = b^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\theta}\right) = c^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\theta}\right).$$

$$N = \mu\sqrt{\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^2 + \left(1 - \frac{z}{\theta}\right)^2}.$$

5. Un point M peut se mouvoir sans frottement sur la surface d'un ellipsoïde : il est attiré par les trois sommets *positifs*, repoussé par les trois autres, proportionnellement à la distance et en raison inverse du carré de l'axe correspondant. Trouver la position d'équilibre et la pression sur la surface.

R. $$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad N = 2\mu\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}.$$

6. Une droite fait avec le plan horizontal un angle α ; un point M, mobile sur cette droite sans frottement, est en équilibre sous l'action d'une force verticale 3P agissant de haut en bas, d'une force verticale P agissant en sens contraire, et de deux autres forces égales à P, dirigées, l'une suivant la droite, l'autre horizontalement. Déterminer l'angle α, et la réaction de la droite.

R. $$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}; \qquad N = 2P.$$

7. Quelle est la position d'équilibre d'un point matériel soumis à l'action d'une force parallèle à l'axe des z négatifs, sur le cercle déterminé par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad ax + by + cz = 0\,?$$

R. $$x = \pm\frac{Rc}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \mp\frac{Ra}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

CHAPITRE XI.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

63. La théorie de la réduction et de l'équilibre des forces appliquées à un même point permet d'établir immédiatement un principe général, duquel on déduit les lois de l'équilibre des forces appliquées à un système de points matériels, liés entr'eux d'une manière quelconque. Posons d'abord quelques définitions.

Considérons un système de points matériels entre lesquels existent des liaisons quelconques. On appelle *mouvement virtuel* de ce système tout déplacement infiniment petit que l'on considère, non comme s'effectuant en réalité, mais comme *pouvant* s'effectuer. Un point quelconque M du système éprouve alors ce qu'on nomme un *déplacement virtuel*. Une droite tangente en M à la trajectoire du point et proportionnelle à la différentielle de l'arc de cette trajectoire, représente ce qu'on appelle la *vitesse virtuelle* du point M : cette expression vient de ce que les arcs

infiniment petits parcourus dans le déplacement virtuel, pouvant être censés décrits dans un même temps infiniment Δt, sont entr'eux comme les vitesses avec lesquelles les points se meuvent dans ce déplacement; mais, en réalité, le temps n'a rien à voir dans la question et nos vitesses virtuelles seront simplement des lignes. Pour désigner les différentielles se rapportant à un mouvement virtuel, nous emploierons la caractéristique ∂ au lieu de d, et nous les appellerons des *variations*.

On pourra d'ailleurs toujours prendre, en grandeur et en direction, les déplacements virtuels des points du système au lieu de leurs vitesses virtuelles, parce que l'équation dans laquelle ces quantités doivent figurer a tous ses termes du premier ordre.

Le *travail virtuel* d'une force est le produit de cette force par la projection, sur sa direction, de la vitesse virtuelle de son point d'application. P étant la force appliquée à un point M, ∂s la vitesse virtuelle de ce point, $(P, \partial s)$ l'angle compris entre ces deux directions, le travail virtuel de P est exprimé par $P\,\partial s \cos(P, \partial s)$, et est *positif* ou *négatif* suivant que la vitesse virtuelle se projette sur la direction même de la force ou sur son prolongement.

On exprime autrement le travail virtuel en introduisant les composantes rectangulaires X, Y, Z de la force P et les variations ∂x, ∂y, ∂z des coordonnées du point M correspondantes au mouvement virtuel considéré. On a, en effet,

$$\cos(P, \partial s) = \frac{X}{P}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{Y}{P}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{Z}{P}\frac{\partial z}{\partial s},$$

d'où

$$(1) \qquad P\,\partial s \cos(P, \partial s) = X\,\partial x + Y\,\partial y + Z\,\partial z,$$

ce qui est l'expression transformée du travail virtuel de la force P.

Le travail virtuel de la résultante R *de plusieurs forces* P, P',... *appliquées à un même point est égal à la somme algébrique des travaux virtuels des composantes dans le même mouvement virtuel.* En effet, projetons la résultante R et les composantes P sur la direction de la vitesse virtuelle. Nous aurons, d'après la première propriété des résultantes,

$$R \cos(R, \partial s) = \Sigma P \cos(P, \partial s),$$

et en multipliant les deux membres par ∂s,

$$R\,\partial s \cos(R, \partial s) = \Sigma P\,\partial s \cos(P, \partial s),$$

ce qui exprime la propriété énoncée.

64. Ces principes posés, soient M un point matériel libre et R la résultante des forces P qui lui sont appliquées : il faut et il suffit, pour l'équilibre, que R soit nul. D'ailleurs, la vitesse virtuelle δs ayant une direction quelconque, l'équation $R = 0$ entraîne celle-ci

$$R\,\delta s \cos(R, \delta s) = 0,$$

et réciproquement, si cette équation a lieu par tout mouvement virtuel du point, comme $\cos(R, \delta s)$ ne saurait être nul pour tous ces déplacements, on aura nécessairement $R = 0$. L'équation

$$R\,\delta s \cos(R, \delta s) = 0, \quad \text{ou} \quad \sum P\,\delta s \cos(P, \delta s) = 0,$$

exprime donc la condition d'équilibre; donc, *pour que les forces appliquées à un point matériel libre se fassent équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des travaux virtuels des forces soit nulle pour un déplacement virtuel quelconque du point.*

65. Considérons deux points M, M', soumis respectivement à l'action de deux forces égales et directement opposées P, P', et calculons la somme des travaux virtuels de ces forces pour un déplacement infiniment petit du système des deux points. Soient (x, y, z), (x', y', z') les coordonnées rectangulaires, r la distance des points M, M'; en sorte que

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2.$$

Les forces P, P' étant regardées comme positives ou négatives suivant qu'elles tendent à rapprocher ou à séparer leurs points d'application, les cosinus directeurs de la force P seront

$$-\frac{x - x'}{r}, \quad -\frac{y - y'}{r}, \quad -\frac{z - z'}{r},$$

et par suite, le travail virtuel de cette force sera

$$-\frac{P}{r}[(x - x')\delta x + (y - y')\delta y + (z - z')\delta z].$$

On aura de même pour celui de la force P', en observant qu'elle est de sens contraire à la précédente,

$$\frac{P'}{r}[(x - x')\delta x' + (y - y')\delta y' + (z - z')\delta z'],$$

en sorte que la somme des travaux virtuels de ces deux forces est égale, à cause de $P = P'$, à

$$-\frac{P}{r}[(x - x')(\delta x - \delta x') + (y - y')(\delta y - \delta y') + (z - z')(\delta z - \delta z')].$$

Mais on tire de la valeur de r^2

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')+(z-z')(\delta z-\delta z')=r\delta r;$$

donc enfin, l'expression cherchée de la somme des travaux virtuels des forces P et P′ devient

$$-\mathrm{P}\,\delta r,$$

et elle sera nulle si r est constant. Donc, *dans tout mouvement virtuel pour lequel la distance* MM′ *ne varie pas, la somme des travaux virtuels des forces* P *et* P′ *est égale à zéro.*

Cette propriété s'appliquerait, par exemple, à deux points M et M′ unis par un lien rigide et maintenus à distance constante l'un de l'autre; ou à deux points liés par un fil parfaitement flexible et inextensible, si ce fil reste bien tendu dans le mouvement virtuel considéré. Mais elle cesserait d'avoir lieu si les points M et M′ étaient unis par un lien élastique et que l'on considérât un mouvement virtuel dans lequel ce lien s'allongerait ou se raccourcirait.

66. Nous considérons maintenant un système quelconque de points matériels, sur lequel agissent des forces données; ces points peuvent être libres, ou soumis à des liaisons qui existent entr'eux et établissent entre leurs mouvements une solidarité plus ou moins complète; ils peuvent aussi être gênés par des obstacles en dehors du système, tels que des courbes fixes, ou des surfaces fixes sur lesquelles ils sont astreints à rester, etc.

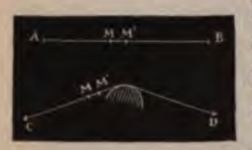
Observons d'abord que, quelles que soient les liaisons, elles sont toujours composées de points matériels appartenant au système et exerçant les uns sur les autres des réactions inconnues, en sorte qu'en réalité l'effet des liaisons se réduit toujours à ces réactions inconnues. De même, l'effet des obstacles fixes sur les points du système se réduit encore, en dernière analyse, à des réactions inconnues que ces obstacles exercent et qui concourent, avec les forces motrices proprement dites, à maintenir l'équilibre. En résumé, le système doit être considéré comme composé d'un certain nombre de points matériels *libres*, sur lesquels agissent les forces données qui sollicitent le système, les réactions inconnues provenant des liaisons entre les points ou des obstacles fixes extérieurs au système.

D'après la règle du N° **64**, il faut, pour que chacun des points du système soit en équilibre, que la somme des travaux virtuels de *toutes les forces* intérieures ou extérieures, qui agissent sur lui soit égale à

zéro pour un déplacement infiniment petit *quelconque* de ce point. Si l'on fait la somme des équations semblables pour tous les points qui composent le système et ses liaisons, on en conclut que dans *tout système matériel en équilibre, la somme des travaux virtuels de toutes les forces, intérieures ou extérieures, qui sollicitent les différents points est nulle pour tout mouvement virtuel que l'on peut concevoir dans le système.*

Sous cette forme, ce théorème offrirait peu d'utilité pour la recherche des conditions d'équilibre, à cause de cette infinité d'actions réciproques obscures et inconnues entre les points du système, dont il faut y tenir compte. Mais en définissant plus nettement les conditions qui limitent les mouvements du système, et ne considérant que les déplacements virtuels compatibles avec ces conditions, on élimine ces réactions inconnues et l'équation ne renferme plus que les travaux virtuels des forces motrices proprement dites.

Concevons d'abord que certains points soient unis par des liens rigides que nous regarderons comme absolument indéformables ; ou par des fils parfaitement flexibles, mais inextensibles, tendus en ligne droite entre les diverses parties du système, ou pliés sur des appuis fixes, etc. Dans



le déplacement d'une tige rigide AB la distance de deux de ses points M et M′ assez voisins pour agir l'un sur l'autre, ne varie pas. Il en est de même dans un fil flexible CD qui se déplace infiniment peu, s'il reste tendu et inextensible comme nous le supposons (1). Et comme les actions moléculaires inconnues et réciproques de ces points M et M′ sont, en vertu de la loi de réaction, égales et directement opposées, il suit du lemme établi plus haut (**65**) que la somme des travaux virtuels de ces forces est nulle pour le déplacement infiniment petit considéré. Le raisonnement étant applicable à tout couple de points faisant partie du système ou de ses liaisons, il en résulte que, pour tout mouvement virtuel du système dans lequel les liaisons satisfont à la condition énoncée, la somme des travaux virtuels des réactions provenant

---

(1) Lorsqu'on parle d'un fil flexible et inextensible, on ne veut pas dire autre chose sinon que, pendant les déformations du fil, les longueurs des arcs élémentaires restent invariables, et par suite, on peut dire que les points matériels assez rapprochés pour que les forces moléculaires s'exercent entr'eux conservent des distances invariables.

des liaisons entre les points s'évanouit d'elle-même, et ces réactions ne figurent plus dans l'équation des vitesses virtuelles.

Supposons ensuite qu'un point M du système soit retenu sur une surface fixe qui n'exerce aucun frottement. La réaction N de la surface étant normale à celle-ci, tandis que la vitesse virtuelle δs du point M est dans le plan tangent si l'on considère un déplacement compatible avec les conditions du système, on a $\cos(N, \delta s) = 0$, le travail virtuel de la réaction N est donc nul. Ce raisonnement est applicable à tous les points du système qui seraient retenus sur des surfaces ou sur des courbes fixes sans frottement : la somme des travaux des réactions de ces obstacles disparaîtra donc de l'équation des vitesses virtuelles.

Il peut se faire encore qu'un point M ne puisse se mouvoir que sur une surface rigide S faisant partie du système, et pouvant se déplacer comme lui. Ici la vitesse δs du point M n'est plus nécessairement perpendiculaire à la réaction N de la surface S, toujours dirigée suivant la normale à S, car le déplacement du point sur la surface se combine avec celui de la surface elle-même; mais la vitesse δs étant regardée comme la résultante d'une vitesse relative du point M, tangente à la surface mobile, et d'une vitesse d'entraînement due au mouvement de la surface, sa projection sur la normale MN ou sur la direction de la réaction N se réduira évidemment à la projection de la vitesse d'entraînement. D'ailleurs la pression N′ que le point M exerce sur la surface S étant égale et opposée à N, et la vitesse de son point d'application étant précisément la vitesse d'entraînement ci-dessus, les forces N et N′ auront des travaux virtuels égaux et de signes contraires dont la somme sera nulle.

Ce qui précède s'applique également aux réactions mutuelles de deux solides S et S′, s'appuyant l'un contre l'autre par des surfaces rigides dépourvues de frottement, dans tout mouvement virtuel où ces surfaces restent en contact. Les travaux virtuels de ces réactions se détruiront encore deux-à-deux, et disparaîtront de l'équation des vitesses virtuelles.

Il suit de là que, dans tout système matériel où les conditions qui limitent les mouvements sont comprises parmi les précédentes, et pour tout mouvement virtuel du système dans lequel ces conditions sont respectées, la somme des travaux virtuels des réactions inconnues étant nulle, il faudra, si l'équilibre a lieu, que la somme des travaux virtuels des forces motrices le soit également.

67. Réciproquement, si cette condition est satisfaite pour *tous* les

mouvements virtuels compatibles avec les conditions auxquelles le système est assujetti, celui-ci sera en équilibre. En effet, nous pouvons raisonner comme si le système partait du repos, ainsi que nous l'avons remarqué précédemment (**62**). Si les forces appliquées au système ne se font pas équilibre, celui-ci prendra un certain mouvement, nécessairement compatible avec les liaisons, et l'on pourrait empêcher ce mouvement en appliquant à chacun des points du système, dans la direction opposée à celle où il tend à se mouvoir, une force d'une intensité convenable. Dès lors, l'équilibre du système aura lieu ; donc, d'après le théorème établi plus haut, la somme des travaux virtuels des forces P qui lui étaient d'abord appliquées, et des forces Q que l'on vient d'introduire pour l'équilibre, sera nulle pour tout mouvement virtuel compatible avec les liaisons, et en particulier pour ce mouvement virtuel que le système aurait pris si l'on n'avait pas introduit les forces Q. Mais, d'après l'hypothèse, la somme des travaux virtuels des forces P est nulle pour tout déplacement compatible avec les conditions du système, donc aussi pour celui-là ; donc la somme des travaux des forces Q devra être nulle séparément. Or, ceci est impossible, car chaque force Q est directement opposée à la vitesse virtuelle de son point d'application et donne un travail virtuel négatif. Donc l'hypothèse faite était absurde, et le système proposé était en équilibre sous l'influence des forces P seulement.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème, qui constitue le *Principe des vitesses virtuelles :*

Pour qu'un système de points matériels, liés entr'eux d'une manière quelconque et sollicités par des forces quelconques, soit en équilibre, il est nécessaire et suffisant que la somme des travaux virtuels de ces forces sont nulle, pour tout mouvement virtuel du système compatible avec les liaisons et conditions auxquelles il est assujetti.

Si donc on désigne par P l'une quelconque des forces motrices, par ∂s la vitesse virtuelle de son point d'application dans un mouvement compatible avec les liaisons, la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre sera exprimée par l'équation

$$(2) \qquad \Sigma\, P\, \partial s \cos (P, \partial s) = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les forces appliquées. Ou, X, Y, Z étant les composantes de la force P ; x, y, z les coordonnées de son point d'application, cette condition pourra s'écrire ainsi :

$$(3) \qquad \Sigma\,(X\, \partial x + Y\, \partial y + Z\, \partial z) = 0.$$

Nous exposerons par la suite la méthode pour appliquer ce principe de manière à en tirer dans les différents cas les conditions d'équilibre, mais il faut d'abord en préciser la portée par quelques remarques.

68. I. Les réactions mutuelles des points du système dont les travaux virtuels se détruisent deux-à-deux dans l'équation d'équilibre sont celles seulement qui s'exercent à des distances très-petites et appartiennent à la catégorie des forces moléculaires. S'il existait, entre les points, des actions s'exerçant à grande distance, comme les attractions des corps célestes, on ne pourrait plus leur appliquer les raisonnements que nous avons faits sur les forces de liaisons; il faudrait considérer ces forces comme des forces P appliquées au système et introduire leurs travaux virtuels dans l'équation de l'équilibre. Quoique ces forces soient encore deux-à-deux égales et opposées, ce n'est que dans des cas exceptionnels que leurs travaux virtuels se détruisent.

II. Nous avons vu que le travail virtuel de la réaction normale N d'une surface fixe, sur laquelle un point M est astreint à se mouvoir, est égal à zéro. Si le point était seulement appuyé contre une surface résistante qu'il pourrait quitter dans un sens, le travail de N serait encore nul pour les déplacements virtuels sur la surface, mais non pour ceux dans lesquels le point s'éloignerait infiniment peu de sa surface d'appui. Si donc on voulait considérer un mouvement virtuel de cette espèce, il faudrait rétablir dans l'équation (2) le travail virtuel correspondant de la réaction N; ou, ce qui revient au même, faire abstraction de la condition imposée par la surface fixe et introduire sa réaction N sur le point M au nombre des forces P appliquées au système. On tire parti de cette remarque pour évaluer ces réactions normales.

III. De même, si la surface était capable de frottement, ce que nous n'avons pas supposé, il faudrait joindre à la réaction normale N dont le travail virtuel est nul pour les déplacements sur la surface, une réaction tangentielle, inconnue d'ailleurs d'intensité et de direction, et dont le travail virtuel ne serait pas nul en général. Le travail de cette réaction tangentielle devrait donc figurer dans l'équation d'équilibre avec ceux des forces motrices P.

IV. Enfin, les réactions moléculaires développées dans les liaisons ont été éliminées de l'équation (2) parce que, dans les différents modes de liaison que nous avons admis entre les points du système, un déplacement virtuel compatible avec ces liaisons n'altère pas sensiblement les distances

réciproques entre les points qui sont assez rapprochés pour agir l
sur les autres. Mais cette conclusion ne s'appliquerait pas, comme
vu, au cas où les liens seraient élastiques, si l'on considérait un m
ment virtuel dans lequel ces liens subiraient un allongement o
contraction. Par exemple, si deux forces P et P′, égales et cont
étaient appliquées en deux points M et M′, unis par un fil élastiq
faudrait introduire dans l'équation d'équilibre la somme des t
virtuels de ces deux forces, somme égale, comme on l'a dém
à $-P\,\partial r$, r étant la distance MM′, ∂r la variation de cette distanc
le mouvement virtuel considéré.

69. Appliquons le principe des vitesses virtuelles à quelques exe
pour en bien saisir l'utilité.

I. Un point matériel M, posé sur un plan incliné, est sollicité p
force verticale P, et maintenu en équilibre par une force Q qui f



angle donné β avec le plan. Déterminer la force Q
pression du point M sur le plan, le frottement étan

Soit α l'inclinaison du plan AB sur le plan horiz
et donnons au point M une vitesse virtuelle ∂s d
plan; le principe donne l'équation d'équilibre

$$P\,\partial s \cos(P, \partial s) + Q\,\partial s \cos(Q, \partial s) = 0.$$

Si la vitesse virtuelle du point est normale à P, cos (P, ∂s) s'éva
il faut donc que $\cos(Q, \partial s) = 0$; l'équilibre exige donc que la f
soit dans le plan vertical normal au plan incliné. Prenons ensui
vitesse virtuelle suivant BA : nous aurons

$$\cos(P, \partial s) = \sin\alpha, \quad \cos(Q, \partial s) = -\cos\beta,$$

d'où

$$P\sin\alpha - Q\cos\beta = 0, \quad Q = \frac{P\sin\alpha}{\cos\beta},$$

ce qui fait connaître la force Q. Soit maintenant N la réaction n
du plan; donnons un déplacement virtuel suivant la normale
travail virtuel de la réaction N sera ici $N\,\partial s$. On aura donc

$$-P\partial s\cos\alpha + Q\partial s\sin\beta + N\partial s = 0,$$

d'où

$$N = P\cos\alpha - Q\sin\beta = \frac{P\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

II. Un point matériel M est sollicité vers trois points A, B, C par des forces respectivement égales à mr, $m'r'$, $m''r''$; r, r', r'' désignant les distances MA, MB, MC; m, m', m'' des coefficients constants. L'angle BAC est droit. Déterminer la position d'équilibre du point M.

Prenons AB pour axe des x, AC pour axe des y, l'axe des z normal aux deux premiers; $AB = a$, $AC = b$. Les cosinus directeurs de la force qui attire le point M vers A étant

$$-\frac{x}{r}, \quad -\frac{y}{r}, \quad -\frac{z}{r},$$

les composantes de cette force sont $-mx$, $-my$, $-mz$, son travail virtuel est

$$-m(x\delta x + y\delta y + z\delta z).$$

Calculant de même ceux des deux autres forces, et égalant la somme à zéro, on obtient, en posant $M = m + m' + m''$,

$$(\alpha) \qquad (m'a - Mx)\,\delta x + (m''b - My)\,\delta y - Mz\delta z = 0.$$

Les vitesses virtuelles δx, δy, δz n'étant liées par aucune condition, on doit égaler à zéro leurs coefficients. On déduit de là

$$x = \frac{m'a}{m + m' + m''}, \quad y = \frac{m''b}{m + m' + m''}, \quad z = 0,$$

pour les coordonnées de la position d'équilibre : elle est donc dans le plan ABC.

Si le point M ne pouvait se mouvoir que dans un plan représenté par l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

les variations $\delta x, \ldots$ devraient vérifier la condition

$$(\beta) \qquad A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z = 0;$$

éliminant une variation entre (α) et (β) et égalant à zéro les coefficients des deux autres, qui restent indéterminées, on aura les équations

$$\frac{Mx - m'a}{A} = \frac{My - m''b}{B} = \frac{Mz}{C} = \frac{M(Ax + By + cz) - m'Aa - m''Bb}{A^2 + B^2 + C^2}$$
$$= -\frac{MD + m'Aa + m''Bb}{A^2 + B^2 + C^2},$$

qui fournissent immédiatememt les valeurs de x, y, z correspondantes à la position d'équilibre.

Exercices.

1. Une tige rigide AB peut tourner librement autour de son extrémité supérieure A, dans un plan vertical; un poids P est suspendu à son extrémité inférieure B(1); une force Q appliquée normalement à la tige en un de ses points O, est proportionnelle à l'inclinaison α de la tige sur l'horizontale; déterminer la valeur de α pour laquelle l'équilibre a lieu.

R. $AB = a$, $AO = b$, $Q = \mu\alpha$, μ étant une constante. La condition d'équilibre est donnée par l'équation

$$\frac{\cos\alpha}{\alpha} = \frac{\mu b}{Pa}.$$

2. Un système articulé de Peaucellier (ex. 11, p. 68) est dans un plan vertical, les points B, O étant fixes, la droite OB horizontale. Des poids donnés P, Q pendent respectivement en A et en C. Déterminer la position d'équilibre.

R. Soient $OA = a$, le rayon du cercle décrit par le bouton A; $BP = b$ la distance du pivot B à la droite qui parcourt le sommet C; φ l'angle $180° - AOB$.

On a pour l'équilibre

$$\cos\varphi\,(1 + \cos\varphi) = \frac{bQ}{aP}.$$

3. Un point matériel pesant se meut librement sur une parabole dont l'axe est vertical vers le haut : il est en outre soumis à une force répulsive normale à l'axe et proportionnelle à sa distance à cet axe. Trouver la condition d'équilibre.

R. Soient ϖ le poids du point mobile, μ l'intensité de la force répulsive à l'unité de distance p, le demi-paramètre de la parabole. Il faut que l'on ait

$$p = \frac{\varpi}{\mu},$$

et le point est en équilibre dans toutes les positions.

4. Un point matériel M, mobile sans frottement sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, est sollicité par trois forces respectivement perpendiculaires à ces axes, proportionnelles à des constantes μ, μ', μ'', et en raison inverse des carrés de ses distances δ, δ', δ'' à ces axes. Déterminer la position d'équilibre.

R. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde. Soient A, B, C des constantes définies par les équations

$$\frac{\mu}{A^3} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}, \quad \frac{\mu'}{B^3} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, \quad \frac{\mu''}{C^3} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}.$$

---

(1) Quoique les notions relatives à la pesanteur ne soient exposées que plus loin, nous nous en servons dans les exercices, les élèves étant censés recevoir ces notions dans un cours antérieur.

On aura, pour l'équilibre,

$$\frac{\delta}{A}=\frac{\delta'}{B}=\frac{\delta''}{C}.$$

On en déduit sans peine les valeurs de x, y, z correspondantes à la position d'équilibre.

CHAPITRE XII.

ÉQUILIBRE ET RÉDUCTION DES FORCES APPLIQUÉES A UN SOLIDE LIBRE.

70. Nous allons appliquer le principe des vitesses virtuelles à la recherche des conditions d'équilibre d'un système de figure invariable, ce que nous avons appelé un *solide*, soumis à l'action de forces données et d'ailleurs entièrement libre. Les solides naturels ne jouissent pas de cette rigidité absolue que nous leur attribuons ici : néanmoins, comme on le verra, les équations que nous allons établir leur sont applicables et, dans la plupart des cas, suffisent pour déterminer les conditions de leur équilibre.

Soient X, Y, Z les composantes rectangulaires de la force appliquée à un point M du solide; δx, δy, δz les variations des coordonnées de ce point dans un mouvement virtuel quelconque du solide : la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre est exprimée par l'équation

$$(1) \qquad \Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les forces appliquées au solide.

D'après une remarque déjà faite (**62**), on peut remplacer dans cette équation δx, δy, δz par les composantes v_x, v_y, v_z de la vitesse du point M dans le mouvement virtuel considéré, et ces composantes, pour le mouvement le plus général d'un solide libre, sont données par les équations suivantes établies dans la cinématique (**32**);

$$\left\{\begin{array}{l} v_x = u_x + qz - ry, \\ v_y = u_y + rx - pz, \\ v_z = u_z + py - qx, \end{array}\right.$$

u_x u_y, u_z étant les composantes de la vitesse de translation; p, q, r les

composantes de l'axe instantané de rotation du solide, suivant les axes coordonnés. L'équation (1) devient ainsi

$$\Sigma [X (u_x + qz - ry) + Y (u_y + rx - pz) + Z (u_z + py - qx)] = 0.$$

Les composantes u_x, u_y, u_z, p, q, r étant des quantités indépendantes de (x, y, z), peuvent être mises hors du signe Σ; l'équation peut donc s'écrire

$$u_x \Sigma X + u_y \Sigma Y + u_z \Sigma Z + p \Sigma (yZ - zY) + q \Sigma (zX - xZ) + r \Sigma (xY - yX) = 0.$$

La vitesse de translation peut avoir une valeur et une direction quelconques, puisque l'équation doit être vérifiée pour tous les mouvements virtuels compatibles avec la rigidité du système; il en est de même de l'axe instantané de rotation. Les quantités u_x, u_y, u_z, p, q, r sont donc entièrement arbitraires dans cette équation, ce qui exige que l'on ait

$$(2) \qquad \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0;$$

$$(3) \quad \Sigma (yZ - zY) = 0, \quad \Sigma (zX - xZ) = 0, \quad \Sigma (xY - yX) = 0.$$

Réciproquement, si ces équations sont vérifiées, l'équation (1) sera vraie pour tout mouvement virtuel du solide. *Les six équations* (2) *et* (3) *expriment donc les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre des forces appliquées à un solide libre.*

71. L'interprétation des équations (2) est facile; pour énoncer les trois suivantes, il faut introduire une nouvelle notion. Soient P une force appliquée à un point M; AA' un axe quelconque sur lequel on distingue une direction *positive* A'A et une direction négative AA'. Par le point M, menons un plan MBC normal à AA', et coupant cet axe en B; projetons la force P sur ce plan, soit P_1 la projection; enfin, soit $BC = p$ la perpendiculaire abaissée du point B sur cette composante MP_1. Le produit $P_1 p$ se nomme *le moment de la force* P *par rapport à l'axe* AA'; on le regarde comme positif ou négatif suivant que la force P_1 tend à faire tourner la perpendiculaire BC de gauche à droite par rapport à la direction positive BA, ou en sens contraire. Observons que BC est perpendiculaire à l'axe AA' et à MP_1, par suite, au plan PMP_1 et à la direction MP de la force : p mesure donc la plus courte distance entre l'axe AA' et la direction MP. Ainsi *le moment d'une force par rapport à un axe est le produit de la projection de la force sur un plan normal à l'axe, par la plus courte distance entre l'axe*



et la direction de la force, le signe de ce moment étant déterminé par la convention ci-dessus.

Il y a donc deux cas où le moment est nul : celui où la force P est parallèle à l'axe AA′, et celui où la direction de la force P rencontre l'axe AA′.

On sait exprimer les moments d'une force P par rapport à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, en fonction des composantes X, Y, Z de P, et des coordonnées x, y, z de son point d'application M. Prenons, par exemple, l'axe de z, et cherchons le produit $P_1 p = MP_1 \times BC$. Pour faciliter cette recherche, admettons pour un instant que MP_1 représente l'axe d'une rotation imprimée au solide, et que l'on transporte cet axe parallèlement à lui-même au point B, en BP_2, de la manière expliquée en cinématique (**32**). On sait que ce déplacement engendre une translation normale au plan BMP_1 ou BMC, égale à la vitesse qu'avait le point B dans la rotation autour de l'axe MP_1. Cette vitesse est donc égale au produit $BC \cdot MP_1$ ou $P_1 p$, dirigée suivant BZ, et de même signe, comme il est facile de le voir, que le moment $P_1 p$ que nous cherchons. Le problème est donc ramené à exprimer cette vitesse du point B en fonction des données x, y, z, X, Y, Z, au moyen des formules du nº **17** qui expriment la composante v_z de la vitesse d'un point dans une rotation autour d'un axe passant par l'origine. Or, les coordonnées du point B, pour l'origine M, sont $-x$, $-y$; les composantes de l'axe MP_1 parallèlement aux axes OY, OZ, sont précisément les composantes X, Y de la force P. Nous avons donc pour la vitesse cherchée



$$xY - yX ;$$

c'est donc là, en grandeur et en signe, l'expression du moment de la force P par rapport à l'axe des z ; un calcul semblable donne $yZ - zY$, $zX - xZ$, pour les moments relatifs à OX, OY. Les équations (2) et (3) s'énonceront donc comme il suit :

Pour qu'un solide libre sollicité par des forces quelconques soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des composantes de toutes ces forces parallèlement à trois axes rectangulaires, soit nulle pour chaque axe ; que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à trois axes rectangulaires, soit nulle par chaque axe.

On voit immédiatement que si ces conditions sont remplies pour trois axes rectangulaires donnés, elles le seront pour une droite quelconque

de l'espace, puisque l'équilibre aura lieu, et que la droite pourrait être choisie pour axe des x.

72. Appliquons les équations (2) à la solution du problème suivant : deux forces seulement, P et P', étant appliquées à un solide libre, que faut-il pour qu'elles se fassent équilibre?

Soient X, Y, Z les composantes de P ; X', Y', Z' celles de P' ; M (x, y, z), M' (x', y', z') leurs points d'application. Les équations (2) et (3) donnent

$$X + X' = 0,\quad Y + Y' = 0,\quad Z + Z' = 0,\quad (yZ - zY) + (y'Z' - z'Y') = 0,$$
$$(zX - xZ) + (z'X' - x'Z') = 0,\quad (xY - yX) + (x'Y' - y'X') = 0.$$

Des trois premières, on tire $X' = -X$, $Y' = -Y$, $Z' = -Z$, c'est-à-dire que les forces P, P' doivent être égales, parallèles et de sens contraire. Les trois autres deviennent, par cette condition,

$$(y - y')Z - (z - z')Y = 0,\quad (z - z')X - (x - x')Z = 0,$$
$$(x - x')Y - (y - y')X = 0,$$

ou

$$\frac{x - x'}{X} = \frac{y - y'}{Y} = \frac{z - z}{Z},$$

ce qui nous montre que la droite qui passe par les points M, M' d'application se confond avec la direction des forces. Ainsi *les forces* P *et* P' *sont égales et directement opposées :* telle est la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre. Il importe d'observer que, si les trois premières équations seules avaient lieu, l'équilibre n'existerait pas.

L'importante propriété que nous venons d'établir nous indique sous quelles conditions une force P appliquée à un solide libre peut être remplacée par une autre force P', sans que rien soit changé au mouvement du solide. Quelle que soit la force inconnue P' qui jouit de cette propriété, il est permis de l'appliquer au solide en même temps qu'une force Q égale, opposée et appliquée au même point, puisque l'on ne change rien ainsi au mouvement que la force P tend à produire. Mais pour que la force P' seule produise le même effet que la force P ou que le système P, P', Q, il faut et il suffit, évidemment, que les forces P et Q se fassent équilibre, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, soient égales, de sens contraire, et agissant suivant une même droite. Donc les forces P et P' sont égales, de même sens, dirigées suivant une même droite. De là le principe suivant : *On peut, sans modifier l'état de mouvement ou d'équilibre d'un solide entièrement libre, transporter le point d'applica-*

tion d'une force qui agit sur lui en un autre point quelconque pris sur la direction de la force ou sur son prolongement, et ces points sont d'ailleurs les seuls qui jouissent de cette propriété.

Ce principe est celui de la *transposition du point d'application*. On l'admet souvent comme une sorte d'axiome, mais il a besoin d'être démontré, car c'est uniquement au point de vue du mouvement du solide ou de son équilibre que la substitution dont il s'agit est indifférente. Quant aux actions intérieures développées entre les points matériels qui composent le solide, il est clair qu'elles peuvent être fortement modifiées par le transport d'une force d'un point à un autre sur sa propre direction; et c'est précisément pourquoi il fallait d'abord, en établissant le principe des vitesses virtuelles, éliminer ces réactions intérieures et établir, comme nous venons de le faire, que l'état de mouvement ou d'équilibre d'un solide n'est pas changé par une transformation qui modifie pourtant les actions intérieures dans le système.

73. *Équilibre et réduction des forces dirigées dans un même plan.* — Lorsque les forces P qui sollicitent un solide libre ont leurs directions dans un même plan, les conditions d'équilibre se simplifient. On choisit ce plan pour plan XY; on a, pour chaque force, $z=0$, $Z=0$. Les équations (2) et (3) se réduisent à

$$(4) \qquad \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Les deux premières expriment que les forces données transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, s'y font équilibre. Dans la troisième, $xY - yX$ représente le moment de la force P par rapport à l'axe des z : or, dans le cas actuel, la force P se confond avec sa projection P_1 sur un plan normal à l'axe OZ, et la plus courte distance p avec la perpendiculaire OC abaissée de l'origine O sur la direction même de la force P.

Lorsque l'on considère des forces dans un même plan, on appelle *moment d'une force par rapport à un point* O *du plan* le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée du point O sur sa direction, le produit étant affecté du signe + ou du signe — selon que la force tendrait à faire tourner la perpendiculaire dans un sens ou dans l'autre autour du point O. On voit donc que, dans le problème actuel, le moment $xY - yX$ de la force P par rapport à l'axe OZ n'est autre chose que le *moment* de la force P par rapport à l'origine O. Donc, *pour l'équilibre*

d'un solide libre, soumis à l'action de forces agissant dans un même plan, il faut et il suffit 1° *que la résultante de ces forces, transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, soit nulle;* 2° *que la somme algébrique des moments de ces mêmes forces par rapport à un point* O *du plan soit nulle aussi.*

Comme tout point du plan peut être pris pour origine, il est clair que cette dernière condition devra être vérifiée, quel que soit le point du plan que l'on choisisse pour le point O.

Cherchons, en général, si des forces données P, P'.., agissant sur un solide libre dans un même plan XY, peuvent être remplacées par une force unique R, appliquée en un point C (x_1, y_1) du solide dans ce plan. Répétant le raisonnement que nous avons fait au n° **72** pour établir le principe de la transposition, on prouverait qu'il faut et qu'il suffit, pour cela, que les forces P, P',.. fassent équilibre à une force Q, égale et opposée à R, appliquée au même point C. Nous tirons de là, et des équations (4), les conditions

$$-R_x + \Sigma X = 0, \quad -R_y + \Sigma Y = 0, \quad -x_1 R_y + y_1 R_x + \Sigma(xY - yX) = 0$$

ou

$$(5) \qquad R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y, \quad x_1 R_y - y_1 R_x = \Sigma(xY - yX).$$

Les deux premières de ces équations montrent que *la force cherchée* R *a même grandeur et même direction que la résultante des forces données transportées en un même point parallèlement à elles-mêmes.* De la troisième, nous concluons que son point d'application C est un point *quelconque* de la droite, lieu de l'équation

$$x_1 \Sigma Y - y_1 \Sigma X = \Sigma(xY - yX)$$

où l'on regarde (x_1, y_1) comme coordonnées courantes. Cette droite est évidemment parallèle à la direction de la force R, ce qui s'accorde d'ailleurs avec le principe de la transposition du point d'application. La troisième équation montre, en outre, que *le moment de la force cherchée* R *par rapport à l'origine* O, c'est-à-dire par rapport à un point arbitraire du plan, *est égal à la somme algébrique des moments des forces données* P *par rapport au même point.*

74. *Équilibre et réduction des forces parallèles.* — Si les forces appliquées au solide libre sont parallèles entr'elles, agissant les unes dans

un sens, les autres en sens contraire, désignons par α, β, γ les angles directeurs d'une force P : ses composantes seront

$$X = P \cos \alpha, \quad Y = P \cos \beta, \quad Z = P \cos \gamma.$$

Nous pouvons regarder $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ comme ayant les mêmes valeurs pour toutes les forces, car, s'il y en a qui agissent en sens contraire de P, on devrait pour celles-là changer les signes des cosinus directeurs, ce qui revient évidemment à affecter du signe — les forces qui seraient dans ce cas, et à laisser les cosinus directeurs invariables. Cette convention admise, les six équations d'équilibre du n° **70** deviennent

$$(6) \qquad \cos \alpha \, \Sigma P = 0, \quad \cos \beta \, \Sigma P = 0, \quad \cos \gamma \, \Sigma P = 0,$$

$$(7) \quad \cos \gamma \, \Sigma P y - \cos \beta \, \Sigma P z = 0, \quad \cos \alpha \, \Sigma P z - \cos \gamma \, \Sigma P x = 0,$$
$$\cos \beta \, \Sigma P x - \cos \alpha \, \Sigma P y = 0.$$

Multiplions les équations (6) respectivement par $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ et ajoutons-les : nous en déduirons l'équation équivalente $\Sigma P = 0$. Les équations (7) se réduisent à deux, savoir

$$(8) \qquad \frac{\Sigma P x}{\cos \alpha} = \frac{\Sigma P y}{\cos \beta} = \frac{\Sigma P z}{\cos \gamma}.$$

Pour les énoncer commodément, appelons *moment d'une force* P *par rapport à un plan* le produit de la force par la distance de son point d'application à ce plan, distance qui sera comptée positivement d'un côté du plan, négativement de l'autre. En vertu de cette définition, Px est le moment de la force P par rapport au plan YZ, etc. Les conditions d'équilibre des forces parallèles, appliquées à un solide libre, sont donc celles-ci : *Il faut et il suffit que la somme algébrique des forces données soit égale à zéro, et que les sommes des moments de ces forces, par rapport à trois plans rectangulaires, soient entr'elles comme les cosinus des angles que la direction commune des forces fait avec les axes respectivement normaux à ces plans.*

75. Cherchons encore s'il est possible de remplacer des forces parallèles P sollicitant un solide libre par une force unique R, appliquée en un point C (x_1, y_1, z_1), sans troubler l'équilibre ou le mouvement du solide. Si nous appliquons au point C une force Q égale et opposée à la force inconnue R, cette force Q devra faire équilibre au système des

forces P, comme nous l'avons observé. On aura donc, d'après les équations (6),

$$-R_x + \cos\alpha\Sigma P = 0, \quad -R_y + \cos\beta\Sigma P = 0, \quad -R_z + \cos\gamma\Sigma P = 0;$$

ou bien

$$(9) \qquad R_x = \cos\alpha\Sigma P, \quad R_y = \cos\beta\Sigma P, \quad R_z = \cos\gamma\Sigma P.$$

Si donc la force R existe, elle aura pour angles directeurs α, β, γ et pour intensité ΣP, c'est-à-dire qu'elle sera parallèle aux forces motrices P et égale à la somme algébrique de ces forces, le signe dont ΣP est affecté indiquant si cette force R agit dans le sens (α, β, γ), ou en sens contraire.

Ensuite, les deux équations (8), dans lesquelles nous introduirons les moments de la force Q appliquée au point (x_1, y_1, z_1), deviendront

$$(10) \qquad \frac{-Rx_1 + \Sigma Px}{\cos\alpha} = \frac{-Ry_1 + \Sigma Py}{\cos\beta} = \frac{-Rz_1 + \Sigma Pz}{\cos\gamma}.$$

Ces deux équations, auxquelles doit satisfaire le point d'application C de la force R, représentent, quand (x_1, y_1, z_1), sont des coordonnées courantes, une droite parallèle à la direction commune des forces. La force R, dont la direction, l'intensité et le sens d'action sont déjà déterminés, peut donc être appliquée en un point quelconque de cette droite sans cesser d'être équivalente au système des forces P, ce qui s'accorde avec le principe de la transposition du point d'application.

La force R, équivalente à un groupe de forces données, dans le cas actuel et dans celui du N° **73**, se nomme par extension la *résultante* de ces forces.

76. Il existe pourtant sur la droite (10) un point remarquable G tel que, si la direction des forces P par rapport au solide varie d'une manière quelconque, leurs points d'application, leurs intensités et le sens relatif de leur action ne changeant pas, la résultante R passera toujours par ce point G. En effet, quelques valeurs qu'on attribue à α, β, γ, les équations (10) sont vérifiées si l'on pose

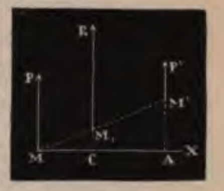
$$(11) \qquad Rx_1 = \Sigma Px, \quad Ry_1 = \Sigma Py, \quad Rz_1 = \Sigma Pz.$$

Le point x_1, y_1, z_1 déterminé par ces équations se nomme le *centre des forces parallèles* P. De là la propriété suivante, fort importante : *Quand des forces parallèles dont les points d'application et les intensités sont déterminées agissent sur un solide libre, elles peuvent être remplacées, en général, par une force unique parallèle aux composantes et égale à leur*

somme algébrique. Cette résultante passe par un point déterminé du solide, quelle que soit la direction commune des forces parallèles données par rapport au solide.

Si, comme il est naturel, on choisit pour point d'application de la force R le point G que nous venons de déterminer, les équations (11) fourniront le théorème suivant : *Les moments de la résultante d'un système de forces parallèles, par rapport à trois plans rectangulaires, sont respectivement égaux aux sommes des moments des composantes par rapport à ces mêmes plans.* La même propriété subsistera d'ailleurs, cela est clair, pour un plan quelconque. Les équations (11) montrent encore que *si la somme des moments des forces* P, *par rapport à un certain plan, est nulle, le centre des forces parallèles est dans ce plan.* Car, si l'on choisit ce plan pour plan XY, l'équation $\Sigma Pz = 0$ ayant lieu par hypothèse, on aura $z_1 = 0$, ce qui démontre la proposition.

77. Pour établir entre la statique et la cinématique un rapprochement utile, appliquons ce qui précède au cas où les forces parallèles se réduisent à deux, P et P'. Pour plus de facilité, prenons pour plan XY celui qui contient ces forces, pour origine le point d'application M de P, pour axe des y positifs la direction MP, l'axe des x positifs étant perpendiculaire à M'P'. La force P sera positive; P' sera positif ou négatif suivant que cette force agit ou non dans le même sens que P. Les équations (9) et (11) deviennent, (x', y') étant les coordonnées de M',



$$(12)\quad \begin{cases} R_x = 0, \quad R_y = P + P', \quad R_z = 0, \quad \text{d'où } R = P + P'; \\ Rx_1 = P'x', \quad Ry_1 = P'y', \quad Rz_1 = 0. \end{cases}$$

La résultante est donc parallèle aux forces données, située dans le même plan, égale à leur somme algébrique. L'équation $Rx_1 = P'x'$ donne ensuite

$$\frac{x'}{R} = \frac{x_1}{P'} = \frac{x' - x_1}{R - P'} = \frac{x' - x_1}{P},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{AC}{MP} = \frac{MC}{M'P'} = \frac{AM}{M_1R},$$

relations qui ont lieu quels que soient le sens d'action des forces et les signes des segments AC, MC, AM. Il en resulte le théorème suivant, dont l'analogie avec la loi de composition des rotations parallèles est évidente :

Deux forces parallèles P, P′ *appliquées à un solide libre donnent une résultante* R *qui leur est parallèle, dans le même plan, et égale à leur somme algébrique dont le signe détermine le sens de son action. Sur une perpendiculaire commune aux directions de ces trois forces* P, P′, R, *deux quelconques d'entr'elles déterminent un segment proportionnel à la troisième.*

La résultante R se trouve ainsi parfaitement déterminée. Le point M_1, où sa direction coupe la droite MM′ qui joint les points d'application de P, P′, est le centre de ces forces parallèles. On a en effet par les équations (12),

$$\frac{x_1}{x'} = \frac{y_1}{y'},$$

ce qui fait voir que le centre des forces parallèles ne peut être que sur la droite MM′.

78. La détermination de la résultante R dans le cas dont il s'agit présente une exception remarquable, semblable à celle qui se rencontre dans la réduction des rotations parallèles. Si l'on suppose P′ = — P, R devient nul et x_1 devient infini, à moins que x' ne soit nul, c'est-à-dire que les forces P, P′ ne soient égales et opposées, auquel cas elles se détruiraient.

Le système de deux forces P, P′ égales, parallèles et de sens contraire n'est donc pas réductible à une simple force sur un solide libre, car, si cette force existait, son point d'application devrait être déterminé par les formules ci-dessus, et nous venons de voir qu'elles conduisent à $x_1 = \infty$. D'autre part, quoique R soit nul, l'équilibre n'a pas lieu, car nous avons démontré au n° **72** qu'il faudrait pour cela que les forces P et P′ agissent suivant une même droite. Le système P, P′ est donc irréductible; on lui donne le nom de *couple*, et nous étudierons plus loin ses propriétés.

Il est bon d'observer que ce cas d'exception peut se présenter dans quelques-uns des problèmes que nous avons traités précédemment. Ainsi, dans le cas où les forces agissent dans un même plan, nous avons vu (**73**) que leur résultante est déterminée par les équations (5). Or, si l'on a $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, sans avoir en même temps $\Sigma(xY - yX) = 0$, il viendra

$$R_x = 0, \quad R_y = 0,$$

la résultante sera nulle, et la droite représentée par la troisième équation (5) s'éloignera à l'infini. En raisonnant comme plus haut, on verra que les forces P ne sont pas réductibles à une simple force; nous montrerons plus loin qu'elles se réduisent à un couple.

De même, si dans les équations (9) et (10) on avait $\Sigma P = o$, sans que l'on eût en même temps

$$\frac{\Sigma Px}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma Py}{\cos\beta} = \frac{\Sigma Pz}{\cos\gamma},$$

la résultante des forces parallèles serait nulle et les équations (10) seraient impossibles, en sorte qu'aucune force ne pourrait remplacer seule le système des forces P ; celles-ci se réduiraient encore à un couple.

Exercices.

1. Un solide est sollicité par quatre forces dans un même plan, appliquées à quatre points donnés A, B, C, D en ligne droite ; la première ϖ, verticale de bas en haut ; la deuxième P, verticale de haut en bas ; les deux autres ϖ', ϖ'', perpendiculaires à la droite AD. La force P est donnée ainsi que l'angle α que fait AD avec l'horizontale AX. Trouver ϖ, ϖ', ϖ'' quand l'équilibre a lieu ?

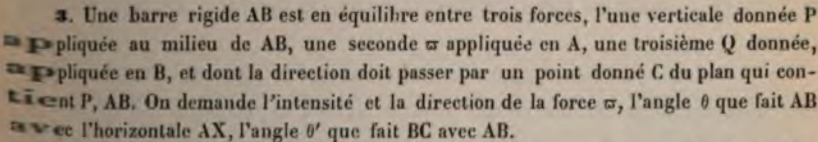
R. $AB = a$, $CD = b$; on a

$$\varpi = P, \quad \varpi' = \varpi'' = \frac{Pa\cos\alpha}{b}.$$

2. Un rectangle ABCD, placé dans un plan vertical, est en équilibre sous l'action de trois forces, l'une verticale P appliquée au milieu de BC, la deuxième horizontale ϖ appliquée en A, la troisième ϖ', de direction inconnue, appliquée en D. On connaît l'angle α que fait AD avec l'horizontale AX, et l'on demande de déterminer les forces ϖ et ϖ'.

R. Soient $AB = b$, $BC = 2a$, X et Y les composantes horizontale et verticale de la force ϖ'. On trouve

$$\varpi = \frac{P(a\cos\alpha - b\sin\alpha)}{2a\sin\alpha}, \quad X = -\varpi, \quad Y = P.$$



3. Une barre rigide AB est en équilibre entre trois forces, l'une verticale donnée P appliquée au milieu de AB, une seconde ϖ appliquée en A, une troisième Q donnée, appliquée en B, et dont la direction doit passer par un point donné C du plan qui contient P, AB. On demande l'intensité et la direction de la force ϖ, l'angle θ que fait AB avec l'horizontale AX, l'angle θ' que fait BC avec AB.

R. Soient $AB = 2l$; ρ et α les coordonnées polaires de C rapportées au pôle A et à AX ; en projetant les forces sur l'horizontale et la verticale, et prenant les moments par rapport au point A, on trouvera pour déterminer les inconnues le système d'équations :

$$\sin\theta' = \frac{P}{2Q}\cos\theta, \quad 2l\sin\theta' = \rho\sin(\theta + \theta' - \alpha),$$

$$\varpi\cos(\varpi, X) = -Q\cos(\theta + \theta'), \quad \varpi\sin(\varpi, X) = P - Q\sin(\theta + \theta').$$

4. Trois forces P, P', P'' sont appliquées à un parallélipipède rectangle solide,

respectivement suivant trois arêtes qui ne se rencontrent pas. Quelle est la condition pour qu'une seule force puisse leur faire équilibre ? Déterminer cette force.

R. Soient a, b, c trois arêtes respectivement parallèles à P, P′, P″ ; X, Y, Z les composantes de la force cherchée; x, y, z des coordonnées de son point d'application, par rapport à ces trois arêtes. La condition demandée est que l'on ait

$$\frac{c}{P''} - \frac{b}{P'} = \frac{a}{P},$$

et si elle est réalisée, on aura

$$X = -P, \quad Y = -P', \quad Z = -P'', \quad \frac{x}{P} = \frac{z}{P''}, \quad \frac{y-b}{P'} = \frac{z-c}{P''}.$$

5. Aux sommets B, C, D d'un tétraèdre ABCD sont appliquées trois forces parallèles P, Q, R. Déterminer la distance r du centre de ces forces au point A.

R. $AB = b, \quad AC = c, \quad AD = d.$

$$r^2(P^2 + Q^2 + R^2) = P^2 b^2 + Q^2 c^2 + R^2 d^2 + 2PQbc \cos BAC + 2QRcd \cos CAD$$
$$+ 2RPda \cos DAB.$$

CHAPITRE XIII.

THÉORIE DES COUPLES ET RÉDUCTION GÉNÉRALE DES FORCES APPLIQUÉES A UN SOLIDE.

79. Nous avons appelé *couple* le système irréductible de deux forces égales, parallèles, de sens contraire, appliquées à un solide. Le *moment* d'un couple est le produit de l'une des forces P, P′ qui le constituent par la distance p comprise entre les directions de ces forces; p est le *bras* du couple.

La première question que nous allons résoudre sera de chercher ce que deviennent, pour un couple donné K, les expressions ΣX, ΣY,.., $\Sigma(yZ - zY)$,... c'est-à-dire les sommes des projections des forces P, P′ sur les axes rectangulaires et les sommes de leurs moments par rapport à ces axes. Les forces P, P′ étant égales, parallèles, de sens contraire, il est clair que $X' = -X$...., donc ΣX, ΣY, ΣZ sont nuls. Soient $M(x, y, z)$ $M'(x', y', z')$ les points d'application des forces P, P′ : les sommes des moments auront pour valeurs,

$$(y-y')Z-(z-z')Y, \quad (z-z')X-(x-x')Z, \quad (x-x')Y-(y-y')X.$$

Pour nous représenter géométriquement ces quantités, concevons que l'on élève en un certain point du plan, par exemple au point M′, une droite M′K normale au plan du couple, proportionnelle à à son moment Pp, et du côté de ce plan où la rotation que la force P imprimerait à la perpendiculaire p se ferait de gauche à droite pour un observateur placé sur M′K, les pieds en M′, la tête en K. Ainsi déterminée, cette droite M′K, que l'on appelle l'*axe* du couple K, coïncide évidemment pour la grandeur, la direction et le sens avec la droite qui figurerait la vitesse du point M′, dans une rotation du solide autour d'un axe représenté par la droite MP, rotation dont la vitesse angulaire serait conséquemment proportionnelle à la force P.



Or, les composantes de cet axe de rotation étant X, Y, Z; les coordonnées du point M′ étant x', y', z', il suit des formules (3) du n° **17** que les composantes de cette vitesse du point M′, ou les projections de M′K sur les axes, seront respectivement

$$Y(z'-z)-Z(y'-y),\quad Z(x'-x)-X(z'-z),\quad X(y'-y)-Y(x'-x),$$

c'est-à-dire auront précisément les mêmes valeurs que les moments du couple. De là cette proposition, très-importante dans la théorie des couples : *Les sommes des moments des forces d'un couple par rapport à trois axes rectangulaires sont égales, respectivement, aux composantes de l'axe du couple parallèlement à ces trois axes coordonnés.*

D'où il suit, toute droite pouvant être prise pour un des axes coordonnés, que *la somme des moments des forces d'un couple par rapport à une droite quelconque est égale à la projection de l'axe du couple sur cette droite.*

80. Ce qui précède permet de résoudre fort simplement la question suivante : sous quelles conditions un couple K′ peut-il être substitué à un couple K donné, appliqué sur un solide libre, sans modifier le mouvement de celui-ci? — On voit tout d'abord, par un raisonnement déjà plusieurs fois employé (**72**, **73**), qu'il est nécessaire et suffisant pour cela que le solide soit en équilibre entre le couple donné K, et un couple K″ formé de deux forces égales et directement opposées à celles qui constituent le couple K′. Ecrivons donc que les six équations



d'équilibre d'un solide libre sont vérifiées, lorsque l'on joint aux forces qui composent le couple K celles qui composent le couple K''. Les trois équations

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0$$

sont nécessairement vérifiées, puisqu'elles le sont pour chacun des couples K, K'' séparément. Quant aux trois équations des moments $\Sigma(yZ - zY) = 0$, etc., il suit de ce qui a été établi au N° précédent que, si l'on désigne par K_x, K_y, K_z les composantes de l'axe du couple K parallèlement à OX, OY, OZ; par K'_x, K'_y, K'_z celles de l'axe du couple K', et si l'on observe que, d'après les conventions adoptées (**79**), l'axe du couple K'' a pour composantes $-K'_x$, $-K'_y$, $-K'_z$, les trois équations des moments pourront s'écrire

$$K_x - K'_x = 0, \quad K_y - K'_y = 0, \quad K_z - K'_z = 0,$$

ou

$$K'_x = K_x, \quad K'_y = K_y, \quad K'_z = K_z,$$

ce qui signifie que les couples K, K' ont leurs axes égaux, parallèles et dirigés dans le même sens. Cette condition est d'ailleurs suffisante, d'après le raisonnement qui précède, donc

Pour qu'un couple K' *puisse être substitué à un couple* K *sur un solide libre, il est nécessaire et suffisant que les axes de ces couples soient égaux, parallèles et dirigés dans le même sens.*

En observant la manière dont se détermine l'axe d'un couple, ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Deux couples sont équivalents sur un solide libre pourvu que leurs plans soient parallèles, que leurs moments soient égaux, et que le sens de la rotation qu'ils tendent à imprimer à leurs bras soit le même.

Il suit de là cette conséquence fort importante, qu'un couple est complétement déterminé, au point de vue du mouvement qu'il peut imprimer à un solide libre, dès que son axe est connu de grandeur et de direction, puisque cet axe fait connaître tout ce qui doit être déterminé pour que l'effet du couple soit invariable.

Quant au point où l'on place l'origine de l'axe représentatif du couple, il est tout-à-fait arbitraire : on peut, par exemple, prendre pour chaque couple le milieu de son bras, ou encore, et c'est ce qu'il y a de plus commode, choisir pour origine commune des axes de tous les couples que l'on a à considérer, l'origine même des coordonnées. Il résulte du théorème ci-dessus que cela n'a aucune influence.

81. *Réduction des couples.* — Examinons si, lorsque des couples en nombre quelconque agissent sur un solide libre, il est possible de les remplacer par un couple unique sans modifier le mouvement ou l'équilibre du solide. Tirons de l'origine O des droites OK, OK′, OK″,... représentant les axes des couples donnés : ceux-ci sont par là entièrement déterminés. Raisonnons comme dans le problème précédent : pour qu'il existe un couple G équivalent au système des couples K, K′, K″,.. il faut et il suffit que le solide soit en équilibre entre les couples K, K′, K″,.. d'une part, et un couple égal et de sens contraire au couple G, de l'autre. Donc, les trois équations des moments

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \ldots$$

devront être vérifiées, si l'on joint aux forces qui composent les couples K, K′... celles qui composent le couple égal et contraire à G. Soient K_x, K_y, K_z les projections sur OX, OY, OZ de l'axe d'un couple quelconque K; d'après ce que nous avons établi au n° **79**, ΣK_x, ΣK_y, ΣK_z représentent en grandeur et en signe les sommes des moments des forces données par rapport à OX, OY, OZ; de même, si G_x, G_y, G_z sont les composantes de l'axe du couple G, $-G_x$, $-G_y$, $-G_z$ représenteront les sommes des moments des forces du couple égal et contraire à G. Les trois équations des moments seront donc ici

$$\Sigma K_x - G_x = 0, \quad \Sigma K_y - G_y = 0, \quad \Sigma K_z - G_z = 0,$$

ou

$$G_x = \Sigma K_x, \quad G_y = \Sigma K_y, \quad G_z = \Sigma K_z,$$

ce qui détermine en grandeur et en direction l'axe du couple cherché G. Comme d'ailleurs les équations des projections, $\Sigma X = 0$, ..., ne donnent lieu à aucune condition puisqu'elles sont vérifiées par chaque couple isolément, on voit que *des couples en nombre quelconque, appliqués à un solide libre, sont toujours réductibles à un couple unique ; l'axe du couple qui peut ainsi remplacer le système des couples proposés est la résultante des axes de ces couples.*

Ainsi, en particulier, *si des couples* K, K′..., *ont leurs plans parallèles*, et conséquemment leurs axes dirigés suivant une même droite, *l'axe du couple résultant sera égal à la somme algébrique des axes des couples composants, et le signe de cette somme indiquera le sens dans lequel il est dirigé.*

Si les couples K, K′ se réduisent à deux, l'axe du couple qui leur est équivalent sera la diagonale du parallélogramme construit sur les axes des couples K et K′.

S'ils sont au nombre de trois K, K′, K″, l'axe du couple équivalent sera la diagonale du parallèlipipède construit sur leurs axes, et ainsi de suite.

Réciproquement, un couple quelconque K pourra être remplacé par deux ou plusieurs autres, du moment que son axe est la résultante de leurs axes. On peut, par exemple, lui substituer trois couples, ayant leurs axes dirigés suivant les axes OX, OY, OZ et donnés, en grandeur et en signe, par les projections de l'axe du couple K sur OX, OY, OZ, ou K_x, K_y, K_z. Il suit de là que si l'on considère un nombre quelconque de couples K; si G désigne l'axe du couple résultant; λ, μ, ν les angles directeurs de cet axe, les formules relatives aux résultantes donneront

$$G_x = \Sigma K_x, \quad G_y = \Sigma K_y, \quad G_z = \Sigma K_z,$$

$$G_x = G \cos\lambda, \quad G_y = G \cos\mu, \quad G_z = G \cos\nu,$$

$$G = \sqrt{(\Sigma K_x)^2 + (\Sigma K_y)^2 + (\Sigma K_z)^2},$$

$$\cos\lambda = \frac{G_x}{G}, \quad \cos\mu = \frac{G_y}{G}, \quad \cos\nu = \frac{G_z}{G},$$

ce qui déterminera en grandeur et en direction l'axe du couple G.

82. *Relations entre la cinématique et la statique.* — Au point de vue de la forme géométrique, il y a analogie complète entre les lois qui régissent les translations et les rotations imprimées à un solide, et celles qui régissent les couples et les forces qui lui sont appliquées. On peut faire glisser un axe de rotation comme on veut sur sa propre direction sans altérer le mouvement, comme on peut transporter une force sans changer son effet. Les forces appliquées à un même point, les forces parallèles, se composent suivant les mêmes lois que les axes de rotation passant par un même point et que les axes parallèles. Aux couples de forces, correspondent les couples de rotation, c'est-à-dire les translations; et de même que la droite qui figure une translation peut être portée indifféremment en tout point du solide, de même l'axe représentatif d'un couple de forces peut avoir, comme on l'a vu, son origine en un point quelconque. Les axes des couples en nombre quelconque se composent suivant les mêmes lois que les vitesses des translations, etc..

Le théorème du N° **32**, sur le déplacement d'un axe de rotation parallèlement à lui-même, a pour corrélatif le suivant, qui se démontre absolument de la même manière.



Soit P une force appliquée en un point O d'un solide : nous ne changeons rien à l'action de cette force P en appliquant en un point O′, choisi arbitrairement, deux forces P′, P″ égales et parallèles à P, et directement opposées l'une à l'autre. Les forces P, P″ constituent un couple dont l'axe O′V est normal au plan POO′, égal au produit de la force P par la distance p du point O′ à OP, et dirigé du côté du plan POO′ où la rotation que la force P tend à imprimer à p aurait lieu de gauche à droite (**79**). Mais on voit immédiatement que cet axe O′V se confond pour la grandeur et la direction, avec la droite représentative de la vitesse du point O′ dans une rotation du solide représentée par OP, donc *toute force* P *appliquée en un point* O *d'un solide peut être transportée parallèlement à elle-même en un autre point quelconque* O′ *du solide, pourvu qu'on lui joigne un couple dont l'axe* O′V *est figuré par la vitesse du point* O′ *dans une rotation dont l'axe serait représenté par la force primitive* OP.

La règle est donc encore la même qu'au N° **32**, les forces remplaçant les axes de rotation, l'axe du couple remplaçant la translation, et toutes les conséquences que nous avons déduites de la première règle pour la réduction des mouvements d'un solide se déduiront de celle-ci pour la réduction des forces.

83. Soient P, P′...., des forces en nombre quelconque, appliquées à un solide libre. Transportons la force P parallèlement à elle-même en un point O choisi arbitrairement dans le solide (ou même en dehors pourvu qu'il lui soit invariablement lié), ce qui engendrera un certain couple K. Répétons la même opération pour toutes les autres forces P′,...appliquées au solide.

Toutes les forces égales et parallèles aux forces données, qui agissent maintenant au point O, se réduisent à une force unique R, représentée par la résultante des droites qui représentent ces forces (**59**) : nous l'appelerons la *force résultante*. Tous les couples K se réduiront à un seul couple G, dont l'axe OG sera la résultante des axes des couples K, comme nous l'avons établi au n° **81** : c'est le *couple résultant*. D'où ce théorème, dont nous avons vu l'analogue en cinématique (**32**) : *Tant de forces que l'on voudra, appliquées à un solide libre, sont toujours réduc-*

tibles à une seule force appliquée en un point arbitrairement choisi, et à un seul couple.

La force résultante R est indépendante du point choisi O, que nous nommons le *centre de réduction*, puisqu'elle n'est autre que la résultante de toutes les forces P transportées parallèlement à elles-mêmes au point O. Mais l'axe du couple G varie de grandeur et de direction suivant le point du solide où se fait la réduction des forces, et l'analogie nous permet d'énoncer les théorèmes suivants, qui se démontreraient comme leurs corrélatifs en cinématique :

Parmi tous les modes de réduction des forces P *à une force et à un couple, on peut choisir le centre de réduction de telle manière que la force résultante et l'axe du couple résultant soient dirigés suivant une même droite. Tous les points d'une certaine droite, parallèle à la force résultante, jouissent de cette propriété.*

L'axe du couple résultant relatif à un centre de réduction non situé sur cette droite donne une projection constante sur celle-ci, projection égale à l'axe du couple résultant relatif à un centre de réduction situé sur cette droite, qui prend le nom d'*axe central* du système des forces données.

L'axe central est donc le lieu des centres de réduction pour lesquels l'axe du couple résultant est un *minimum*.

84. Tous ces théorèmes relatifs à l'axe du couple résultant se transforment en théorèmes relatifs aux moments des forces, si l'on a égard à la relation suivante : Lorsqu'on transporte à l'origine O la force P, dont les composantes rectangulaires sont X, Y, Z, et dont le point d'application M a pour coordonnées x, y, z, ce transport fait naître un couple K. On a vu (**79**) que la projection K_x de l'axe de ce couple sur OX égale, en grandeur et en signe, la somme des moments des forces du couple par rapport à OX; ou, puisque l'une des forces du couple K est ici appliquée en O et donne un moment nul par rapport à OX, la projection de OK sur OX se réduit au moment de la force P appliquée en M, c'est-à-dire à $yZ - zY$. Observant que l'axe OX est une droite quelconque et l'origine O un point quelconque de cette droite, on tire de là ce premier théorème : *Le moment d'une force* P *par rapport à une droite donnée exprime, en grandeur et en signe, la projection sur cette droite de l'axe du couple* K *que l'on fait naître, en transportant la force* P *parallèlement à elle-même en un point quelconque de cette droite.*



On a de même, pour les projections sur OY, OZ, les valeurs

$$K_y = zX - xZ, \qquad K_z = xY - yX.$$

85. Nous pouvons maintenant déterminer analytiquement la force résultante et le couple résultant d'un système de forces données, pour un centre de réduction O choisi comme origine des axes rectangulaires. La force résultante R coïncidant avec la résultante des forces P transportées à l'origine O, nous aurons

$$R_x = \Sigma X, \quad R_y = \Sigma Y, \quad R_z = \Sigma Z,$$

et si a, b, c sont les angles directeurs de R,

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2},$$

$$\cos a = \frac{\Sigma X}{R}, \quad \cos b = \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \cos c = \frac{\Sigma Z}{R}.$$

De même, l'axe du couple résultant G étant la résultante des axes des couples K définis plus haut, si λ, μ, ν désignent les angles directeurs de cet axe et G sa valeur, nous aurons

$$G_x = \Sigma K_x = \Sigma (yZ - zY), \qquad G_y = \Sigma K_y = \Sigma (zX - xZ),$$

$$G_z = \Sigma K_z = \Sigma (xY - yX).$$

$$G = \sqrt{\Sigma (yZ - zY)^2 + \cdots}, \quad \cos \lambda = \frac{G_x}{G}, \quad \cos \mu = \frac{G_y}{G}, \quad \cos \nu = \frac{G_z}{G}.$$

On voit clairement ici ce qu'expriment les six équations d'équilibre d'un solide, données au nº **70** : *les trois premières expriment que la force résultante* R *est nulle ; les trois dernières que l'axe du couple résultant* G *est nul.*

86. La relation entre les couples et les moments, donnée au nº **84**, conduit immédiatement aux conséquences suivantes : 1° *La somme des moments des forces* P *appliquées à un solide, par rapport à un axe* OX, *est égale à la projection algébrique, sur cette droite, de l'axe du couple résultant des forces* P *relatif à un centre de réduction* O *pris sur* OX. 2° *De toutes les droites passant par un même point* O, *celle pour laquelle la somme des moments des forces est maximum coïncide avec la direction de l'axe du couple résultant* OG *des forces* P, *pour le centre de réduction* O. 3° *Pour toutes celles de ces droites qui font un même angle avec* OG, *la somme des moments à la même valeur ; pour celles qui sont perpendiculaires à* OG, *le moment est nul.* 4° *La somme des*

moments des forces P *par rapport à une droite* OT *qui fait avec* OX, OY, OZ *des angles* α, β, γ *a pour expression*

$$\cos\alpha\Sigma K_x + \cos\beta\Sigma K_y + \cos\gamma\Sigma K_z.$$

5° *Il existe une droite unique telle que, en chacun de ses points, la direction de la droite pour laquelle la somme des moments est maximum coïncide avec celle de la droite elle-même* (AXE CENTRAL). *Cette somme des moments est d'ailleurs un* MINIMUM, *par rapport au moment maximum relatif à toute autre droite dans l'espace.*

87. Résolvons une dernière question. Nous avons prouvé (**83**) qu'en général le système de forces P, appliquées à un solide libre, est réductible à une force et à un couple. Quelles sont les conditions qui doivent avoir lieu pour que le système soit réductible : 1° à une simple force R ; 2° à un simple couple G ?

1° Soit C (x_1, y_1, z_1) le point où il faut appliquer la force résultante R pour que le couple résultant s'évanouisse. Les forces P devront être équilibrées par une force égale et opposée à R, donc

$$(1)\left\{\begin{array}{c} -R_x + \Sigma X = 0, \quad -R_y + \Sigma Y = 0, \quad -R_z + \Sigma Z = 0, \\ -y_1R_z + z_1R_y + \Sigma(yZ - zY) = 0, \quad -z_1R_x + x_1R_z + \Sigma(zX - xZ) = 0, \\ -x_1R_y + y_1R_x + \Sigma(xY - yX) = 0. \end{array}\right.$$

Les trois premières donnent $R_x = \Sigma X$, $R_y = \Sigma Y$, $R_z = \Sigma Z$, ce qui détermine la force R sans aucune condition. Les trois autres peuvent s'écrire

$$(2)\quad y_1\Sigma Z - z_1\Sigma Y = \Sigma K_x,\quad z_1\Sigma X - x_1\Sigma Z = \Sigma K_y,\quad x_1\Sigma Y - y_1\Sigma X = \Sigma K_z;$$

multipliées respectivement par ΣX, ΣY, ΣZ et ajoutées, elles donnent l'équation

$$(3)\qquad \Sigma X\cdot\Sigma K_x + \Sigma Y\cdot\Sigma K_y + \Sigma Z\cdot\Sigma K_z = 0$$

qui, ne renfermant pas x_1, y_1, z_1, exprime une condition à laquelle doivent satisfaire les forces données P pour que le problème admette une solution. Comme ΣX,... sont les composantes de la force résultante R, et ΣK_x,... les composantes de l'axe du couple résultant G relatif à l'origine actuelle des coordonnées (qui est quelconque), cette condition peut s'exprimer ainsi :

Pour que les forces P *appliquées à un solide libre soient réductibles à une force unique, il faut que la force résultante et l'axe du couple résul-*

tant du système des forces P, *relatifs à un centre de réduction donné quelconque, soient perpendiculaires l'une à l'autre.*

Cette condition est d'ailleurs suffisante en général, car, si l'équation (3) est vérifiée, les équations (2) auxquelles le point C doit satisfaire se réduisent à deux et représentent, x_1, y_1, z_1 étant pris pour coordonnées courantes, une droite dont il est facile de voir qu'elle est parallèle à la force résultante, ses cosinus directeurs étant proportionnels à ΣX, ΣY, ΣZ. Chaque point de cette droite peut être pris pour le point C où la force R doit être appliquée, et toutes les conditions (1) étant alors remplies, il est clair que le système des forces P est remplacé par la force R que nous venons de déterminer.

Les équations (2) donnent encore

$$x_1\Sigma K_x + y_1\Sigma K_y + z_1\Sigma K_z = 0,$$

ce qui prouve que la résultante R a sa direction comprise dans un plan mené par l'origine actuelle O, normalement à l'axe du couple résultant G relatif au centre O.

2° Pour que le système des forces P soit réductible à un simple couple G, il faut évidemment que la force résultante R, qui est indépendante du centre de réduction (**83**), se réduise à zéro, c'est-à-dire que l'on ait

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

donc, *que les forces* P, *transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, s'y fassent équilibre.*

Mais il faut de plus que le couple G ne soit pas nul, car alors l'équilibre aurait lieu; donc, les trois quantités

$$\Sigma(yZ - zY), \quad \Sigma(zX - xZ), \quad \Sigma(xY - yX)$$

ne devront pas être nulles simultanément. Si ces deux conditions sont réunies, le système des forces P est réductible à un couple, que l'on peut d'ailleurs transporter partout où l'on veut d'après les propriétés des couples (**80**).

Rapprochant ce qui vient d'être dit de la remarque faite à la fin du N° **78**, concernant les forces dirigées dans un même plan ou les forces parallèles, on reconnaît que les cas où la résultante de ces forces devient illusoire sont précisément ceux où le système des forces P est réductible à un couple, comme cela devait être.

1. Soit MP la droite qui représente une force P; AB un segment de droite quelconque dans l'espace; le moment de la force P par rapport à AB vaut 6 fois le volume du tétraèdre qui a AB, MP pour arêtes opposées, divisé par le segment AB.

2. Le système des forces quelconques P appliquées à un solide libre est généralement réductible à deux forces Q, S non comprises dans un même plan, et cela d'une infinité de manières.

3. Soient MP, MP′,... des droites partant d'un point M : le volume du tétraèdre construit sur un segment AB et sur la résultante de ces droites comme arêtes opposées est égal à la somme des volumes des tétraèdres construits sur l'arête commune AB et sur les droites MP, MP′,... comme arêtes respectivement opposées. (Dans cet énoncé et dans les suivants, les signes des volumes des tétraèdres sont les mêmes que ceux des moments par rapport à AB), des forces représentées par MP, MP′,...

4. La somme algébrique des volumes des tétraèdres construits sur une arête commune AB et sur les droites représentatives d'un système de forces P comme arêtes respectivement opposées, est égale à la somme des volumes des tétraèdres ayant cette même arête AB, et pour arêtes respectivement opposées les deux forces Q, S auxquelles est réductible le système des forces P.

Si cette somme est nulle quelle que soit l'arête AB, le système des forces P est en équilibre.

5. Le tétraèdre construit en prenant pour arêtes opposées, deux forces Q, S auxquelles est réductible un système de forces P, a un volume constant, de quelque manière que les forces Q, S soient choisies.

6. Sur les n forces P appliquées à un solide, prises deux-à-deux comme arêtes opposées, on peut construire $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ tétraèdres. La somme algébrique des volumes de ces tétraèdres est égale au volume du tétraèdre qui a pour arêtes l'un quelconque des systèmes Q, S auxquels le système des forces P est réductible. Si l'équilibre a lieu, la somme est nulle.

CHAPITRE XIV.

DE L'ÉQUILIBRE D'UN SOLIDE QUI N'EST PAS ENTIÈREMENT LIBRE.

88. Lorsque des forces P, P′,... agissent sur un solide dont les mouvements sont limités par certains obstacles fixes, par certaines conditions, deux méthodes peuvent conduire aux conditions d'équilibre. La première consiste à appliquer directement au solide la méthode des vitesses

virtuelles, en ayant égard aux conditions qui limitent les mouvements virtuels du solide. La seconde consiste à joindre aux forces P, P′,... qui sollicitent le solide, les réactions que les obstacles fixes exercent sur lui, réactions généralement inconnues, au moins de grandeur : on peut alors évidemment faire abstraction des conditions imposées aux mouvements du solide, regarder celui-ci comme entièrement libre, et faire usage des équations d'équilibre du n° **70**, ainsi que de toutes les transformations et réductions de forces et de couples que nous avons effectuées sur un solide libre.

Si l'on élimine entre les équations d'équilibre obtenues de cette manière les réactions inconnues provenant des obstacles, on obtiendra un certain nombre d'équations ne contenant plus que les données de la question, c'est-à-dire les composantes des forces P, P′,... et les coordonnées de leurs points d'application : ces équations exprimeront proprement les conditions d'équilibre, ou les relations auxquelles les données devront satisfaire pour que l'équilibre ait lieu. Si l'on suppose qu'elles soient vérifiées, les équations primitives qui ont servi à l'élimination fourniront ensuite les valeurs des réactions inconnues, et par suite les pressions que le solide exerce contre les obstacles fixes, puisque ces pressions sont toujours égales et opposées aux réactions des obstacles.

Cette seconde méthode étant simple et fournissant immédiatement les pressions, nous l'appliquerons de préférence aux exemples suivants.

89. *Equilibre d'un solide fixé par un point.* — Prenons ce point fixe O pour origine des axes rectangulaires OX, OY, OZ; soient X, Y, Z les composantes d'une force quelconque P appliquée au solide; M (x, y, z) son point d'application; U, V, W les composantes de la réaction inconnue que l'obstacle fixe, sur lequel le solide s'appuie, exerce au point O. Nous pouvons faire abstraction de l'obstacle fixe à condition de joindre cette réaction aux forces motrices P. Le solide, rendu libre, doit vérifier les six équations d'équilibre du n° 70, d'où

$$(1) \qquad \Sigma X + U = 0, \quad \Sigma Y + V = 0, \quad \Sigma Z + W = 0,$$

$$(2) \qquad \Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0,$$

les moments des forces U, V, W étant nuls puisque les cordonnées du point O sont $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Les équations (2) ne renferment que les forces données; elles expriment donc la condition nécessaire pour que l'équilibre ait lieu, savoir, *que la somme des moments des forces appliquées au solide, par rapport à trois axes rectangulaires se coupant*

au point fixe, soit nulle pour chaque axe. Il est clair qu'alors elle sera nulle par tout autre axe passant par le point O. On peut dire aussi que *l'axe du couple résultant des forces* P, *relatif au point fixe pris pour centre de réduction, doit être nul.*

Les équations (1) font simplement connaître, en grandeur et en direction, la réaction du point fixe; elles donnent en effet

$$(3)\qquad U = -\Sigma X,\quad V = -\Sigma Y,\quad W = -\Sigma Z,$$

et comme les composantes de la pression que le solide exerce sur l'appui fixe sont $-U$, $-V$, $-W$, ou ΣX, ΣY, ΣZ, on en conclut que *la charge du point d'appui est égale, dans le cas d'équilibre, à la résultante des forces* P *transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point.*

Les conditions d'équilibre exprimées par les équations (2) sont d'ailleurs suffisantes, puisqu'il résulte du système (1) et (2) que l'équilibre aurait lieu, si l'appui exerçait sur le solide une réaction dont les composantes U, V, W auraient les valeurs (3) : or, comme nous admettons que l'appui soit capable d'une résistance indéfinie, il développera nécessairement une réaction suffisante pour maintenir le point O en équilibre.

Si l'on ne supposait pas que l'appui puisse résister indéfiniment, il faudrait joindre aux conditions exprimées par les équations (2) celle-ci que la résultante des forces P transportées au point O ne soit pas supérieure à la pression à laquelle le point d'appui peut résister.

90. Dans le cas où toutes les forces P sont comprises dans un même plan passant par le point O, si l'on choisit ce plan pour plan XY, on a pour chacune des forces, $z = 0$, $Z = 0$. Les équations d'équilibre se réduisent à celle-ci :

$$\Sigma(xY - yX) = 0,$$

qui exprime, comme nous l'avons vu au n° **78**, que *la somme algébrique des moments des forces motrices* P *par rapport au point fixe est nulle.* On écrit encore cette condition sous la forme

$$\Sigma Pp = 0,$$

p désignant la distance du point O à la direction de la force P, et le moment Pp ayant le signe + ou le signe — suivant le sens de la rotation que la force P tend à imprimer à la perpendiculaire p.

91. *Équilibre d'un solide qui a un axe fixe.* — Quand deux points O, O′ du solide sont fixes, le solide ne peut que tourner autour de la droite OO′,

qui est son *axe fixe*. Prenons le point O pour origine, l'axe des z positifs suivant OO′, les axes OX, OY rectangulaires. Introduisons les réactions que les appuis fixes exercent en O et O′ sur le solide ; soient U, V, W les composantes de la réaction agissant en O ; U′, V′, W′ celles de la réaction sur O′, a la distance OO′. Le solide étant regardé comme libre, nous aurons, pour l'équilibre, les six équations connues

$$(4)\quad \Sigma X + U + U' = 0, \quad \Sigma Y + V + V' = 0, \quad \Sigma Z + W + W' = 0,$$

$$(5)\quad \Sigma(yZ - zY) - aV' = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) + aU' = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0,$$

en observant que, pour le point O, $x = y = z = 0$, et pour O′, $x = 0$, $y = 0$, $z = a$.

La troisième des équations (5) est la seule qui soit indépendante des réactions inconnues : elle exprime donc la condition d'équilibre, les autres ne servant qu'à déterminer les réactions U, V, W, U′, V′, W′. Donc *il faut et il suffit, pour l'équilibre, que la somme algébrique des moments, par rapport à l'axe fixe, des forces appliquées au solide soit égale à zéro.*

Les autres équations (5) donnent

$$U' = -\frac{\Sigma(zX - xZ)}{a}, \quad V' = \frac{\Sigma(yZ - zY)}{a};$$

U′ et V′ étant connus, les deux premières équations (4) font connaître U et V. Quant aux composantes W, W′ des réactions des points d'appui suivant la direction de l'axe OO′, leur somme seulement est déterminée par l'équation

$$W + W' = -\Sigma Z,$$

chacune individuellement restant inconnue.

Ceci nous apprend que les conditions d'équilibre du solide ne suffisent pas pour déterminer les pressions qu'il exerce sur ses points d'appui dans le sens de la droite OO′ qui passe par ces deux points, résultat facile à prévoir. En effet, nous ne considérons actuellement l'effet des forces sur le solide qu'au point de vue du repos ou du mouvement qu'elles peuvent lui communiquer, et non au point de vue des réactions intérieures qu'elles développent entre les points matériels qui le composent ; et nous cherchons quelles sont les forces que l'on doit substituer aux points fixes pour que le solide, rendu libre, reste en équilibre. Or, nous avons prouvé que toute force appliquée à un solide libre peut être transportée en un

point quelconque de sa direction sans que cela altère en rien le mouvement ou l'équilibre du solide; donc, les réactions W, W' que le solide éprouve, suivant la direction OO', de la part des appuis O et O', peuvent être distribuées comme l'on veut sur chacun de ces deux points, pourvu que leur somme demeure invariable: cela ne saurait avoir d'influence sur l'équilibre du solide. Conséquemment, il est impossible que les équations d'équilibre fournissent autre chose que la somme W + W'.

Dans la réalité, lorsque des forces données se font équilibre sur un solide naturel appuyé sur deux points fixes, chacun des points d'appui supporte une pression bien déterminée, et la composante de cette pression suivant l'axe fixe est également déterminée: W et W' ont donc des valeurs réellement déterminées. Seulement, les équations de l'équilibre du solide sont impuissantes à les faire connaître, et il faut recourir pour les trouver à des considérations tirées de la nature physique du solide et des petits changements de forme qu'il éprouve toujours sous l'influence des efforts qu'il supporte.

92. *Equilibre d'un solide qui s'appuie contre un plan fixe.* — Soit S un solide qui s'appuie par un certain nombre de points A, A', ... contre un plan fixe qui ne produit aucun frottement. Prenons ce plan par plan XY, l'axe des z positifs dirigé du côté où se trouve le solide. Les réactions du plan fixe étant normales à ce plan, sont parallèles entr'elles et appliquées aux points A, A',....; elles donnent une résultante Z_1 parallèle à OZ, et rencontrant le plan XY en un point B, dont les coordonnées sont (x_1, y_1). Nous pouvons donc regarder le solide comme libre en joignant aux forces P qui le sollicitent, les réactions du plan d'appui ou simplement leur résultante Z_1. Nous aurons donc, en appliquant les équations d'équilibre d'un solide libre,



$$(6) \begin{cases} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + Z_1 = 0, \quad \Sigma(yZ - zY) + y_1 Z_1 = 0, \\ \Sigma(zX - xZ) - x_1 Z_1 = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0, \end{cases}$$

le signe Σ s'étendant, comme précédemment, à toutes les forces motrices P.

Les deux premières et la sixième équation sont les seules qui ne renferment que des données; elles expriment les conditions d'équilibre: il faut que *les sommes des composantes des forces appliquées au solide, parallèlement à deux axes rectangulaires dans le plan fixe, et la somme*

de leurs moments par rapport à un axe normal à ce plan, soient nulles séparément.

La troisième équation (6) donne

$$Z_1 = -\Sigma Z,$$

et fait connaître la résultante des réactions du plan contre le solide, donc aussi la pression totale ΣZ que le solide exerce sur le plan : *elle est égale à la somme des composantes des forces* P *normalement au plan d'appui*. Mais comme le plan ne peut réagir que vers *l'extérieur,* puisque nous supposons le solide simplement appuyé contre lui, les réactions appliquées en A, A',... et par suite leur résultante Z_1 sont nécessairement dirigées dans le sens de l'axe des z positifs, donc ΣZ *doit nécessairement être négatif,* ce qui est une nouvelle condition nécessaire pour l'équilibre.

Enfin, la quatrième et la cinquième équation (6) déterminent x_1, y_1, et font connaître le point d'application de la résultante Z_1. On a

$$x_1 = \frac{\Sigma(zX - xZ)}{Z_1}, \quad y_1 = -\frac{\Sigma(yZ - zX)}{Z_1},$$

et il en résulte une nouvelle condition de l'équilibre. Comme le point d'application de la résultante de deux forces parallèles de même sens est compris entre les points d'application de ces forces (**77**), on voit facilement que si l'on compose successivement les réactions appliquées en A, A',..., le point d'application de la résultante Z_1 sera nécessairement compris dans l'intérieur du polygone *convexe* comprenant tous les points A, A',... Il faut donc encore *que les valeurs de x_1, y_1 déterminées ci-dessus correspondent à un point compris dans l'intérieur du polygone dont il s'agit,* sinon l'équilibre est impossible.

En joignant cette condition aux précédentes, on aura toutes les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du solide appuyé contre un plan résistant.

Les équations ci-dessus ne font connaître que la pression totale $-Z_1$ du solide contre le plan : proposons-nous de déterminer les pressions individuelles qui correspondent respectivement à chacun des points d'appui A, A',... Nommons ϖ la réaction du plan fixe en A, (x, y) les coordonnées de ce point; soient (ϖ', x', y') les mêmes quantités par le point A', etc. La réaction totale Z_1 étant la résultante des réactions

$\varpi, \varpi', \ldots$, la théorie des forces parallèles fournit les équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \varpi + \varpi' + \varpi'' + \cdots = Z_1 = -\Sigma Z, \\ \varpi x + \varpi' x' + \varpi'' x'' + \cdots = Z_1 x_1 = \Sigma(zX - xZ), \\ \varpi y + \varpi' y' + \varpi'' y'' + \cdots = Z_1 y_1 = -\Sigma(yZ - zY). \end{array}\right.$$

Les seules inconnues dans ces équations sont $\varpi, \varpi', \ldots$; on les déterminera donc en résolvant ce système d'équations du premier degré, et l'on connaîtra ainsi les pressions que le solide produit respectivement en A, en A',..., puisque ces pressions sont égales et opposées aux réactions $\varpi, \varpi', \ldots$ Comme nous n'avons que *trois* équations, si le nombre des points d'appui est plus grand que trois, les pressions $\varpi, \varpi', \ldots$ seront indéterminées. En réalité, dans le cas de solides naturels, toutes ces pressions individuelles seront nécessairement déterminées, mais les conditions de l'équilibre du solide sont insuffisantes pour nous les faire connaître : il faudrait recourir à la considération des petites déformations que le solide éprouve toujours sous l'influence des forces et des réactions du plan. L'indétermination apparente qui se présente ici est tout-à-fait de même nature que celle dont nous avons parlé, à propos d'un solide fixé par deux de ses points.

Exercices.

1. Une sphère pesante dont le centre de gravité coïncide avec le centre de figure, s'appuie sur deux plans inclinés se coupant suivant une horizontale. Déterminer les pressions de la sphère sur ces deux plans.

R. P le poids de la sphère ; α, α' les inclinaisons des plans d'appui sur le plan horizontal ; ϖ, ϖ' leurs réactions respectives. On a

$$\varpi' = \frac{P \sin \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}, \quad \varpi' = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')}.$$

2. Une barre AB s'appuie sur une horizontale OX et sur une verticale OY, sans frottement ; une force P, verticale de haut en bas, agit au milieu C de AB ; une force inconnue F, appliquée en un point donné D de AB et dirigée vers l'intersection O des deux lignes d'appui, maintient l'équilibre : quelle est l'intensité de cette force F et quelles sont les réactions ϖ et ϖ' de la verticale et de l'horizontale sur AB.

R. $AB = 2a$, α l'inclinaison de la barre sur l'horizontale OX ; ε l'angle DOX ; on a

$$F = \frac{P}{2}\frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \varepsilon)}, \quad \varpi = \frac{P}{2(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varepsilon)}, \quad \varpi' = P + \frac{P}{2}\frac{\sin \varepsilon \cos \alpha}{\sin(\alpha - \varepsilon)}.$$

L'équilibre n'est possible que si $\alpha > \varepsilon$.

3. Un système formé de deux tiges AB, BC assemblées sous un angle droit B, est mobile dans le plan vertical autour du sommet B. Des forces verticales P, P′ sont appliquées aux milieux de AB, BC, et une force donnée Q agit verticalement à l'extrémité C. Déterminer la position d'équilibre.



R. Soient $AB = 2a$, $BC = 2b$; X, Y les réactions horizontale et verticale du point fixe B; θ l'inclinaison du côté BC sur l'horizontale. On trouvera

$$X = 0, \quad Y = P + P' + Q, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{(P' + 2Q)\, b}{Pa}.$$

4. Une barre droite AB s'appuie en A contre une coulisse verticale OZ, en A′ sur une cheville horizontale. Une force verticale P agit au milieu de AB. Déterminer la position d'équilibre, les réactions de la coulisse et de la cheville.

R. $AB = 2a$, α l'angle BAZ que fait la barre avec la coulisse, dans le cas d'équilibre; b la distance de la cheville A′ à la coulisse; ϖ, ϖ' les réactions, respectivement normales à la coulisse et à la barre, de la coulisse et de la cheville. On a

$$\sin \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \varpi = P \cot \alpha, \quad \varpi' = P\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

5. Deux glissières AB, AB′ font avec l'horizontale des angles α, α'; une barre MM′, dont le milieu est soumis à l'action d'une force P verticale de haut en bas, s'appuie sur ces deux glissières sans frottement. Déterminer la position d'équilibre de cette barre, ainsi que les pressions qu'elle exerce sur les glissières.

R. Soient $MM' = 2a$, θ l'inclinaison cherchée de MM′ sur l'horizontale; ϖ, ϖ' les réactions normales des glissières sur la barre. On a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \alpha'}, \quad \varpi = \frac{P \sin \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}, \quad \varpi' = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')}.$$

6. Une demi-sphère homogène et pesante est posée sur un plan horizontal sans frottement. Un poids vertical Q est pendu à la circonférence de sa base. Déterminer la position d'équilibre de la demi-sphère.

R. On verra plus loin que le centre de gravité G de la demi-sphère est sur son axe, à une distance du centre O égale aux $\frac{3}{8}$ du rayon a. Soient P le poids de la demi-sphère, θ l'angle que fait son axe avec la verticale, ϖ la réaction du plan d'appui. On a, dans le cas de l'équilibre,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{8Q}{3P}, \quad \varpi = P + Q.$$

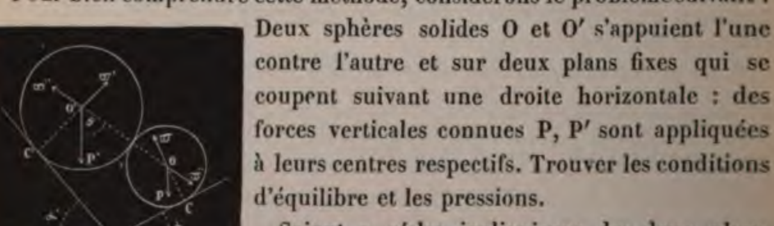
CHAPITRE XV.

DE L'ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES DE FIGURE VARIABLE.

93. Lorsque les points d'un système matériel ne sont plus liés invariablement entr'eux, on peut encore déterminer les conditions de son équilibre, sous l'action de forces données P, P'..., soit par l'emploi direct du principe des vitesses virtuelles, soit, plus facilement encore, par la *méthode des réactions* comme il suit :

Le système se composera, en général, d'un certain nombre de systèmes invariables ou de solides S, S',.. reliés entr'eux par des organes de figure variable. On considérera chaque solide S isolément, comme étant en équilibre entre les forces P qui lui sont appliquées, d'une part, et les réactions inconnues ϖ, ϖ',... qu'exercent sur lui ses liaisons avec les autres solides du système, ou les obstacles fixes contre lesquels il est appuyé, d'autre part. On lui appliquera donc les six équations d'équilibre d'un solide entièrement libre, et l'on opérera ainsi pour tous les solides du système. On exprimera ensuite que les liaisons elles-mêmes, chacune suivant sa nature, sont en équilibre. Éliminant entre toutes les équations ainsi obtenues les réactions inconnues des liaisons ou des obstacles fixes, on obtiendra entre les données de la question un certain nombre de relations qui exprimeront les conditions proprement dites de l'équilibre. Si ces conditions sont vérifiées, les équations primitivement posées feront connaître les réactions inconnues.

Pour bien comprendre cette méthode, considérons le problème suivant :



Deux sphères solides O et O' s'appuient l'une contre l'autre et sur deux plans fixes qui se coupent suivant une droite horizontale : des forces verticales connues P, P' sont appliquées à leurs centres respectifs. Trouver les conditions d'équilibre et les pressions.

Soient α, α' les inclinaisons des deux plans AB, AB' sur le plan horizontal ; ϖ, ϖ' les réactions respectives de ces plans sur les sphères, ϖ'' la réaction mutuelle de celles-ci l'une contre l'autre. Comme on fait abstraction des frottements, ces réactions sont normales aux surfaces en contact. Ainsi, les réactions ϖ, ϖ'' sont normales en C, C'' à la sphère O, et on ne trouble pas

l'équilibre en les transportant au centre O. De même, les réactions ϖ', ϖ' sont normales en C', C'' à la sphère O' et peuvent être supposées agir en O'. Il faut et il suffit donc que les forces P, ϖ, ϖ'' se fassent équilibre autour du point O; les forces P', ϖ', ϖ'' autour du point O'. Pour cela, les trois premières forces doivent être dans un même plan (**60**), les trois dernières également, et comme P, P' sont parallèles et les réactions ϖ'' qui s'exercent en C'' opposées l'une à l'autre, il est clair que le plan vertical passant par les centres O et O' devra passer par les points C, C', C''; il sera normal aux plans d'appui et, par suite, à leur intersection. De là cette première condition d'équilibre : *Les centres des deux sphères doivent se trouver dans un plan vertical normal à l'intersection des plans d'appui;* la figure est alors une coupe faite par le plan vertical en question. Soit θ l'angle que fait la ligne OO' avec la direction des forces P, P' lorsque l'équilibre a lieu.

L'équilibre des forces P, ϖ, ϖ'' autour du point O donne les équations (**60**)

$$\frac{P}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{\varpi}{\sin\theta}=\frac{\varpi''}{\sin\alpha}.$$

L'équilibre du point O' donne de même

$$\frac{P'}{\sin(\theta+\alpha')}=\frac{\varpi'}{\sin\theta}=\frac{\varpi''}{\sin\alpha'}.$$

De là

$$\varpi''\sin(\theta-\alpha)=P\sin\alpha,\qquad \varpi''\sin(\theta+\alpha')=P'\sin\alpha',$$

et par l'élimination de ϖ'',

$$P\sin\alpha\sin(\theta+\alpha')-P'\sin\alpha'\sin(\theta-\alpha)=0,$$

d'où

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{(P+P')\sin\alpha\sin\alpha'}{P\sin\alpha\cos\alpha'-P'\sin\alpha'\cos\alpha}=\frac{P+P'}{P'\cot\alpha-P\cot\alpha'}.$$

L'angle θ étant connu, on peut construire le polygone ACOO'C', dont on connaît l'angle en A, les côtés CO, CO', OO', et les angles COO' $=180^\circ+\alpha-\theta$, C'O'O $=\theta+\alpha'$. On a donc la figure d'équilibre du système proposé. Les pressions des sphères sur les plans et l'une contre l'autre sont ensuite données par les équations

$$\varpi=\frac{P\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)},\qquad \varpi'=\frac{P'\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha')},\qquad \varpi''=\frac{P\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}.$$

94. Dans cet exemple, la liaison entre les deux solides O et O' était établie par le contact de deux surfaces rigides dépourvues de frottement :

leurs réactions étaient donc normales aux surfaces en contact, et de plus, d'après le troisième principe de la mécanique, égales et directement opposées. C'est par cette considération que les réactions provenant des liaisons se sont réduites à trois forces inconnues ϖ, ϖ', ϖ'', et qu'il a été possible de résoudre le problème par les équations du N° 70. Outre ce mode de liaison entre les divers solides d'un système (représenté dans les applications par les engrenages, les galets, etc.), il en existe beaucoup d'autres, parmi lesquels nous traiterons seulement des *tiges rigides* articulées et des *fils flexibles* et inextensibles. Examinons les conditions d'équilibre de ces sortes de liens.

1° Deux solides S, S′ sont liés entr'eux par une *barre* ou *droite* rigide AA′, fixée par ses extrémités A et A′ à ces deux solides respectivement, et pouvant tourner librement autour de ces points d'attache sans aucun frottement. L'équilibre de la tige AA′ exige, comme condition nécessaire et suffisante (**72**), que les forces totales qui agissent à ses extrémités A, A′ soient égales, directement opposées, dirigées suivant la droite AA′, si l'on suppose d'ailleurs qu'aucune force n'agisse entre A et A′. Ces forces sont les pressions des solides S, S′ sur la tige, pressions qui sont respectivement égales et contraires aux réactions de la tige contre les deux solides. La tige AA′ produit donc en A et A′ sur les solides S et S′ qu'elle réunit, des réactions ϖ, ϖ' égales, dirigées suivant la droite AA′, et de sens contraire. Ces réactions peuvent être d'ailleurs des forces de *traction*, tendant à rapprocher S et S′ l'un de l'autre, ou de *pression*, tendant à les écarter. On joindra ces réactions inconnues ϖ, ϖ' aux forces motrices P qui sollicitent les solides S, S′, on supposera ceux-ci libres, et l'on écrira les équations de l'équilibre de chacun d'eux.

2° Nous appelons *fil*, *cordon*, un lien dont la section transversale est négligeable, parfaitement flexible et inextensible, de sorte que la longueur de l'arc formé par le fil entre deux de ses points donnés soit invariable. Pour que ce lien soit en équilibre sous l'action de deux forces seulement, P, P′, agissant à ses extrémités A et A′, il faut d'abord, comme pour un lien rigide, que ces forces soient égales et directement opposées : en effet, la condition d'équilibre de deux forces sur un solide libre a été tirée de la considération des mouvements virtuels du solide, et il est clair que les mêmes mouvements virtuels peuvent être attribués à un fil flexible; les mêmes conditions d'équilibre sont donc *nécessaires*. On accordera ensuite facilement que cette condition nécessaire est aussi suffisante,

si le fil est tendu en ligne droite et les forces P, P′ dirigées de manière à maintenir le fil tendu. Ce point admis, soit M un point quelconque du fil AA′ en équilibre; la réaction qu'exerce sur la portion AM du fil, l'autre portion A′M, doit être, d'après la remarque précédente, dirigée dans le sens MA′ et égale à la force P appliquée en A, puisque le fil AM est en équilibre. La réaction du brin AM sur le brin MA′ est d'ailleurs égale et directement opposée à la précédente, donc dirigée de M vers A et égale à P ou à P′. Ces réactions qui s'exercent en chacun des points du fil en équilibre entre les deux brins du fil qui aboutissent à ce point, constituent ce qu'on nomme la *tension* T du fil. La tension est donc constante dans toute la longueur du fil AA′ et égale à l'une des forces qui se font équilibre à ses extrémités.

Si donc deux solides S, S′ sont reliés par un fil flexible et inextensible AA′, l'équilibre du cordon exigera que les efforts exercés par les solides en A et en A′ soient égaux, dirigés en sens contraire suivant la droite AA′, et de façon à tendre le fil; donc, réciproquement, le fil produira sur les solides S, S′, en A et A′ respectivement, deux forces de *traction* dirigées suivant AA′ en sens contraire l'une de l'autre. Ces réactions seront inconnues en intensité, mais connues en direction et égales entr'elles. En les joignant aux autres forces qui sollicitent les solides S, S′, on regardera ceux-ci comme libres et on leur appliquera la méthode exposée au n° 93. Les équations qui déterminent les réactions inconnues feront connaître la tension T du fil. Il faudra, en pratique, satisfaire encore à cette condition, que le cordon soit capable de résister à la rupture que la tension tend à produire : dans la mécanique pure, on regarde sa résistance comme indéfinie.

95. *Équilibre du polygone funiculaire.* — Appliquons ces principes à l'équilibre d'un système de figure variable, dans lequel les solides S, S′... se réduisent à des points matériels auxquels sont appliquées des forces données, et qui sont réunis deux-à-deux par des fils flexibles et inextensibles. Un tel système s'appelle un *polygone funiculaire :* les points d'application des forces en sont les *sommets*.



Désignons par A_1, A_2, ..., A_n les n sommets du polygone; par P_1, P_2,

..., P_n les forces données qui leur sont respectivement appliquées. Les cordons extrêmes A_1T_0, A_nT_n, attachés au premier et au dernier sommet, devront pour l'équilibre être sollicités par des forces déterminées T_0, T_n, égales aux tensions respectives de ces cordons, et que nous regarderons d'abord comme des forces *données*.

Soient A un sommet quelconque; T, T′ les tensions des fils qui y aboutissent; le point A, regardé comme libre, devra être en équilibre entre la force P qui agit en ce point et les réactions T, T′ des fils adjacents. Cet équilibre s'exprimera, comme on sait, par trois équations (**60**); les n sommets donneront donc $3n$ équations, renfermant les composantes des forces P, T, T′... Mais les $n-1$ tensions T_1, T_2,.. T_{n-1} des $n-1$ cordons A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ n'étant assujetties *a priori* à aucune condition de grandeur et de direction, leurs $3n-3$ composantes rectangulaires figureront comme des inconnues dans le système d'équations dont il s'agit. Si on les élimine, on obtient seulement *trois équations* auxquelles devront satisfaire les forces données

$$T_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ T_n,$$

pour que l'équilibre soit possible. Les $3n$ équations primitives feront ensuite connaître la direction à donner à chacun des côtés du polygone, et la tension qu'il aura dans l'état d'équilibre. Si l'une des forces ci-dessus, par exemple T_n, n'est pas donnée, on pourra la déterminer de manière à satisfaire aux trois équations de condition, et il existera dans ce cas une figure d'équilibre du polygone.

96. Il est facile de trouver directement ces trois équations auxquelles doivent satisfaire les forces T_0, P_1, P_2,.. P_n, T_n pour que l'équilibre soit possible. En effet, le polygone funiculaire tout entier, rendu solide par la pensée, doit vérifier les conditions d'équilibre d'un solide entièrement libre, puisque, comme on l'a déjà vu plus haut, on peut lui attribuer les mêmes déplacements virtuels qu'à un solide. Les relations $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$ du N° **70** doivent être vérifiées, c'est-à-dire que *les forces* $T_0, P_1, P_2, \ldots P_n, T_n$, *transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, doivent s'y faire équilibre*. C'est précisément là ce qu'expriment les équations dont il s'agit.

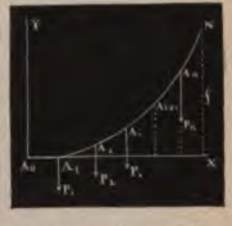
La même remarque permet de déterminer directement en grandeur et en direction, par une construction très-simple, la tension d'un cordon quelconque. Considérons une portion $A_1\ A_2 \ldots A_i$ du polygone, et cher-

chons la tension T_i du cordon suivant. La portion du polygone $A_1 A_2 \ldots A_i$ est en équilibre entre les forces $T_0, P_1, P_2, \ldots, P_i$, qui lui sont appliquées, et la réaction T_i du cordon qui joint le sommet A_i au suivant. Donc, si nous raisonnons comme ci-dessus, nous verrons que les forces $T_0, P_1, P_2, \ldots, P_i, T_i$ transportées en un même point O, s'y font équilibre, de sorte que chacune d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres. Donc *la tension* T_i *d'un cordon quelconque est donnée, en grandeur et en direction, par la résultante des forces* $T_0, P_1, P_2, \ldots, P_i$ *appliquées au polygone depuis une de ses extrémités jusqu'au sommet où commence ce cordon.* Cette construction détermine en même temps la direction du cordon auquel se rapporte la tension T_i : il est donc facile d'en déduire la construction de la figure du polygone en équilibre.



Le plus souvent, au lieu d'être sollicités par des forces données T_0 et T_n, les cordons extrêmes du polygone sont attachés à deux points fixes M, N. Les raisonnements précédents subsistent, mais T_0, T_n y désignent alors les réactions des points d'attache M et N sur ces derniers cordons, réactions qui sont toujours égales aux tensions de ceux-ci. Le problème est plus compliqué, à cause de l'ignorance où l'on est des valeurs de T_0, T_n ; nous n'en considérerons ici que le cas particulier le plus important.

97. Supposons les points M, N fixes et les forces P, qui agissent aux sommets du polygone, parallèles entr'elles; admettons, pour fixer les idées, qu'elles soient *verticales*. L'équilibre de chaque sommet A exigeant que la force P qui lui est appliquée et les cordons qui y aboutissent soient dans un même plan, ce plan contiendra la force P′ parallèle à P et appliquée au sommet suivant; le côté suivant du polygone sera donc encore dans ce même plan, et ainsi de suite. On voit par là que *le polygone funiculaire en équilibre sera tout entier dans le plan vertical passant par les points d'attache* M, N.



Admettons, de plus, qu'un côté soit horizontal et ait son milieu en A_0, sa tension égale à T_0 ; appliquons les principes exposés plus haut à la portion du polygone située *à droite* du point A_0. Nommons $A_1, A_2, \ldots A_n$ les n sommets du polygone compris dans cette portion, et $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les forces verticales qui y sont appliquées; A_i l'un de ces som-

mets, T_i la tension du cordon suivant; φ_i son inclinaison sur l'horizontale A_0X. Les forces $T_0, P_1, P_2, \ldots P_i, T_i$ se faisant équilibre sur le polygone $A_0 A_1 A_2 \ldots A_i$, les sommes de leurs composantes horizontales et de leurs composantes verticales sont nulles; donc

$$-T_0 + T_i \cos\varphi_i = 0, \quad -(P_1 + P_2 + \cdots + P_i) + T_i \sin\varphi_i = 0,$$

d'où

$$T_i \cos\varphi_i = T_0, \quad T_i \sin\varphi_i = P_1 + P_2 + \cdots + P_i.$$

La composante horizontale de la tension d'un cordon quelconque est constante et égale à la tension du cordon horizontal. Sa composante verticale est égale à la somme des forces $P_1, P_2, \ldots, P_i$ *appliquées au polygone depuis le milieu du côté horizontal jusqu'au sommet où commence le cordon considéré.*

L'inclinaison du côté du polygone sur l'horizontale A_0X se tire de l'équation

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_i}{T_0}.$$

Soient $h_1, h_2, \ldots, h_n$ les projections horizontales des côtés $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nN$ du polygone; ces projections sont ordinairement données. Soient $k_1, k_2, \ldots k_n$ les projections verticales des mêmes côtés. On aura, en général,

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{k_i}{h_i}, \quad \text{d'où} \quad k_i = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_i}{T_0} h_i.$$

Soient encore x_i, y_i les coordonnées du sommet A_i rapportées à l'horizontale A_0X et à la verticale A_0Y; on a donc

$$x_i = A_0A_1 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{i-1}, \quad y_i = k_1 + k_2 + \cdots + k_{i-1},$$

ou

$$y_i = \frac{1}{T_0}[P_1h_1 + (P_1 + P_2)h_2 + \cdots + (P_1 + P_2 + \cdots + P_{i-1})h_{i-1}].$$

La tension T_0 du côté horizontal est encore inconnue, mais l'équation précédente conduit à sa détermination, car si on l'applique au calcul de l'ordonnée f du point N, extrémité du dernier côté du polygone, ce qui suppose que l'on fasse $i = n + 1$, il viendra

$$f = \frac{1}{T_0}[P_1h_1 + (P_1 + P_2)h_2 + \cdots + (P_1 + P_2 + \cdots + P_n)h_n],$$

d'où

$$T_0 = \frac{P_1 h_1 + (P_1 + P_2) h_2 + \cdots + (P_1 + P_2 + \cdots + P_n) h_n}{f}.$$

La hauteur f du point d'attache N au-dessus de la droite AX est généralement donnée; c'est ce que l'on nomme la *flèche*. Toutes les quantités qui figurent dans le second membre sont donc connues et T_0 est ainsi connu. Les relations ci-dessus fournissent alors les valeurs de φ_i, T_i, k_i, y_i, et permettent de construire la portion A_0N du polygone en équilibre; la partie A_0M du polygone, à gauche du côté horizontal, se construirait de même. S'il n'y avait pas de côté horizontal, il suffirait de réduire la distance A_0A_1 à zéro et de raisonner de la même manière.

Dans le cas le plus important, celui des *ponts suspendus*, les projections $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont égales à une même longueur h; les forces P_1, $P_2 \ldots$, sont égales à une même force P. On a donc, d'abord, pour la tension du côté horizontal,

$$T_0 = \frac{Ph}{f}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2}\frac{Ph}{f},$$

et par suite

$$y_i = \frac{Ph}{T_0}(1 + 2 + \cdots + i - 1) = \frac{i(i-1)}{2}\frac{Ph}{T_0} = \frac{i(i-1)}{n(n+1)} f,$$

ce qui est l'expression très-simple de l'ordonnée du sommet A_i; son abcisse x_i a pour valeur, à cause de $A_0A_1 = \frac{h}{2}$,

$$x_i = \frac{h}{2} + (i-1)h = \left(i - \frac{1}{2}\right)h.$$

Enfin, on obtient facilement l'équation de la courbe qui passe par tous les sommets du polygone, car on tire de la valeur de x_i

$$i = \frac{1}{2} + \frac{x_i}{h},$$

d'où, portant cette valeur de i dans l'expression de y_i,

$$y_i = \frac{f}{n(n+1)}\left(\frac{x_i}{h} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x_i}{h} - \frac{1}{2}\right) = \frac{f}{n(n+1)}\left(\frac{x_i^2}{h^2} - \frac{1}{4}\right).$$

On voit donc que la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{f}{n(n+1)}\left(\frac{x^2}{h^2} - \frac{1}{4}\right)$$

jouit de la propriété énoncée : c'est une parabole à axe vertical. Enfin, la tension et l'inclinaison d'un côté quelconque $A_i A_{i+1}$ sont données par les formules.

$$T_i = P\sqrt{i^2 + \frac{h^2}{4f^2}n^2(n+1)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_i = \frac{2if}{n(n+1)h}.$$

98. Il arrive que les forces P, au lieu d'être appliquées en des points déterminés $A_1, A_2,\ldots$ d'un fil inextensible, agissent sur des points qui peuvent glisser librement le long du fil, comme, par exemple, sur des anneaux mobiles sans frottement. Il est facile de s'assurer que les conditions d'équilibre trouvées pour le polygone funiculaire doivent subsister, mais il y aura, pour chaque force P, une condition de plus résultant de la mobilité de son point d'application A sur le fil. Donnons un mouvement virtuel au point A, dans lequel les deux points voisins A′, A″ du fil restent immobiles; le point A se meut donc, la somme AA′ + AA″ restant constante, sur la surface d'un ellipsoïde de résolution dont A′, A″ sont les foyers; pour que le travail virtuel de la force P soit nul, il faut que la force soit normale à cette surface, ou que sa direction divise en deux parties égales l'angle A′AA″ compris entre les deux brins de la corde qui aboutissent en A. Les angles PAA′, PAA″ étant égaux, les réactions de ces brins sont égales; la tension du fil est donc la même de part et d'autre du point A.



99. Nous prenons maintenant un exemple des systèmes formés de tiges rigides AA′, A′A″, ..., réunies par leur extrémités autour desquelles elles peuvent d'ailleurs jouer librement. Soient AA′ l'une quelconque de ces barres; P, P′,.. les forces qui lui sont appliquées; ϖ, ϖ' les réactions des tiges voisines, agissant respectivement en A, A′ et d'ailleurs inconnues de grandeur et de direction. L'équilibre de la barre AA′ entre les forces P, P′,..., ϖ, ϖ' s'exprimera en général par six équations, et chacune des barres donnera lieu à un semblable système, mais on devra observer que les réactions réciproques de deux barres contigues sont toujours égales et opposées.



Exemple : *Quatre barres rigides d'égale longueur 2a forment un polygone articulé plan et vertical* ABCB′A′, *appuyant ses extrémités fixes* A, A′ *sur une ligne horizontale* AX ; *les milieux des côtés sont sollicités par des forces verticales*

égales P; *la verticale du point* C *doit tomber au milieu de* $AA' = 2b$. *On demande la figure d'équilibre et les pressions.*

Tout étant symétrique de part et d'autre de la verticale CE, soient α, β les inclinaisons de AB, BC sur AX; U, V les composantes horizontale et verticale de la réaction du point fixe A sur la tige AB; X, Y les composantes de la réaction de BC sur AB. Toutes les forces agissant dans un même plan, l'équilibre de la barre AB donne d'abord les équations (**73**)

$$U + X = 0, \quad V + Y - P = 0,$$

d'où

$$(\alpha) \qquad X = -U, \quad Y = P - V.$$

Puis, le milieu de AB et le point B ayant respectivement pour coordonnées $a \cos \alpha$, $a \sin \alpha$; $2a \cos \alpha$, $2a \sin \alpha$, l'équation des moments (**73**) par rapport au point A donnera

$$-Pa \cos \alpha + Y \cdot 2a \cos \alpha - X \cdot 2a \sin \alpha = 0,$$

ou, réduisant et remplaçant X, Y par leurs valeurs ci-dessus,

$$(P - 2V) \cos \alpha + 2U \sin \alpha = 0,$$

d'où

$$(\beta) \qquad U \operatorname{tg} \alpha = V - \frac{1}{2} P.$$

Les conditions d'équilibre de la droite BC, si l'on observe que la réaction de CB', appliquée en C, doit être horizontale à cause de la symétrie et si on la représente par X_1, donneront les équations

$$-X + X_1 = 0, \quad -Y - P = 0, \quad -Pa \cos \beta - 2X_1 a \sin \beta = 0,$$

la dernière étant obtenue en prenant les moments par rapport au point B. De là et des relations (α)

$$X_1 = X = -U, \quad Y = -P = P - V, \quad \text{ou} \quad V = 2P,$$

et enfin

$$P \cos \beta = 2U \sin \beta \quad \text{ou} \quad (\gamma) \; U \operatorname{tg} \beta = \frac{P}{2}.$$

L'équation (β) devient, par la substitution de la valeur de V,

$$U \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} P,$$

et si l'on élimine U entre cette équation et (γ), on obtient

$$\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta,$$

égalité qui exprime la condition d'équilibre. On a d'ailleurs, entre α et β, la relation

$$2a(\cos\alpha + \cos\beta) = b$$

qui exprime que la projection horizontale de AB + BC est égale à AE. Cette équation et la précédente déterminent α et β; la pression sur le point A se tire des équations

$$U = \frac{P}{2}\cot\beta, \quad V = 2P,$$

et les pressions X, Y, X_1 sont également données par les relations ci-dessus.

Des questions de ce genre peuvent se rencontrer dans la construction des charpentes, où l'on doit chercher à rendre la stabilité du système indépendante de la résistance des assemblages, en faisant en sorte que le système satisfasse de lui-même aux conditions d'équilibre.

Exercices.

1. Deux barres AC, BC aux milieux desquelles agissent des forces verticales P, P', s'appuient par leurs extrémités inférieures A, B sur un même plan horizontal sans pouvoir glisser. Leurs extrémités supérieures s'appuient l'une contre l'autre, en C, par des facettes verticales. Trouver l'inclinaison des barres dans le cas d'équilibre.

R. Soient α, β les angles BAC, ABC. On doit avoir

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{P}{P'}.$$

2. Deux cylindres circulaires solides sont serrés l'un contre l'autre par un fil inextensible contenu dans un plan normal aux génératrices. Quel est le rapport de la tension T du fil à la réaction réciproque ϖ des cylindres.

R. Soient r, r' les rayons des cylindres;

$$T : \varpi = r + r' : 4\sqrt{rr'}.$$

3. Un système articulé de Hart (Ex. 12, p. 68) ABCD est fixé par un point O du côté AB; le côté DC est sollicité par deux forces P, Q, appliquées respectivement en D, C et dirigées vers les points B, A. Déterminer les conditions d'équilibre du système et les réactions mutuelles des tiges.

R. Soient $OA = a$, $OB = b$; α, β les angles BAC, DAC. Il faut, pour que l'équilibre ait lieu, que l'on ait

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{b}.$$

Ensuite, la figure du système en équilibre est déterminée par la relation

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Soient enfin ϖ, ϖ' les réactions des côtés BC, AD sur AB; ϖ'', ϖ''' les réactions des côtés AD, BC sur DC; OX parallèle à AC, OY perpendiculaire. On a

$$\varpi_x = \varpi'_x = -\varpi''_x = -\varpi'''_x = -\frac{P+Q}{2}$$

$$\varpi_y = -\varpi'_y = \varpi''_y = -\varpi'''_y = \frac{P+Q}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

4. Quatre barres forment un quadrilatère gauche articulé ABCD; aux sommets A, B, C, D agissent respectivement des forces P, Q, R, S. Conditions d'équilibre et réactions des barres.

R. 1° Chaque force doit être dans le plan de l'angle au sommet duquel elle agit. 2° On doit avoir entre les directions des forces la relation

$$\frac{\sin(P, AB)\sin(Q, BC)\sin(R, CD)\sin(S, DA)}{\sin(P, AD)\sin(Q, BA)\sin(R, CB)\sin(S, DC)} = 1.$$

Les directions des 4 forces sont 4 génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe, dont les diagonales AC, BD forment deux génératrices de l'autre système. P, Q coupant BD, AC en a, b, on a

$$P : Q = BD \cdot Aa \cdot Cb : AC \cdot Bb \cdot Da.$$

De même pour les autres forces.

5. Des droites rigides réunies par leurs sommets forment un polygone articulé plan et fermé; chaque côté est sollicité par une force normale, appliquée au milieu de sa longueur et proportionnelle à celle-ci. Condition d'équilibre.

R. En appliquant à trois tiges consécutives la méthode des réactions, on trouve que lorsque l'équilibre a lieu 1° tous les sommets sont sur une circonférence C; 2° les réactions réciproques des tiges sont égales; 3° chacune de ces réactions est au rayon de C, comme la force appliquée à une tige est à sa longueur.

CHAPITRE XVI.

APPLICATION DES LOIS DE LA STATIQUE A LA PESANTEUR. THÉORIE DES CENTRES DE GRAVITÉ.

100. L'une des forces naturelles les plus importantes à considérer est la *pesanteur* ou *gravité*, qui s'exerce sur tous les corps placés à la surface de la terre d'une manière constante. On appelle ainsi la force qui détermine le mouvement de chûte des corps abandonnés à eux-

mêmes, au-dessus de la surface du globe. L'expérience a constaté les lois suivantes :

1° La pesanteur agit sur tous les corps indistinctement, quels que soient leurs volumes, leurs formes, leur nature, et sur chacune des parties dans lesquelles on les divise, si petites qu'elles soient : d'où l'on conclut naturellement que cette force agit sur les derniers éléments, sur tous les points matériels qui composent les corps.

2° Le mouvement que la pesanteur imprime à un corps, à un point matériel, parfaitement dégagé de toute action étrangère, est *rectiligne et uniformément varié*. On en conclut (**53**) que la pesanteur est une force constante. Sa direction, celle de la droite qu'elle ferait parcourir à un point matériel tombant librement, est normale à la surface des eaux tranquilles : c'est ce que l'on nomme la *verticale*. Le sens de son action est de haut en bas. On vérifie d'ailleurs facilement, en retenant un corps par un fil qui l'empêche de tomber, que l'action de la pesanteur est encore constante en grandeur et en direction pendant le repos comme pendant le mouvement du corps.

3° Si l'on compare les mouvements que prennent les différents corps sous l'influence de la pesanteur, en écartant toujours autant que possible toute action étrangère, on trouve que l'*accélération* du mouvement dû à la pesanteur *a la même valeur pour tous les corps* en un même lieu, et par suite, pour tous les points matériels quels qu'ils soient. Cette valeur à Paris, a été trouvée égale à 9^m 80896, c'est-à-dire que ce nombre mesure la vitesse acquise au bout d'une seconde par un corps tombant librement. On désigne habituellement par g cette accélération, en sorte que

$$g = 9{,}80896.$$

Il suit de là et de la définition de la masse (**54**) que, si p désigne l'intensité de l'action de la pesanteur sur un point matériel de masse m, on a

$$p = mg,$$

donc *la force que la pesanteur exerce sur un point matériel est mesurée par le produit de la masse de ce point et du nombre constant g*. Elle est donc proportionnelle à la masse.

4° D'après ce qui précède, les forces qui sollicitent les différents points matériels d'un corps en vertu de la pesanteur peuvent être considérées comme sensiblement parallèles entr'elles. Si le corps est un solide, il résulte de la théorie des forces parallèles que nous avons exposée plus

haut (**75-76**) que ces forces donnent une résultante unique, égale à leur somme, dirigée comme elles verticalement de haut en bas, et passant toujours par un point déterminé G du corps, quelle que soit la position de celui-ci par rapport à la direction des forces. Cette résultante se nomme le *poids* du corps; ce point G, centre des forces parallèles dues à la pesanteur, est le *centre de gravité* du solide. On le détermine expérimentalement en suspendant successivement le corps dans deux positions différentes par un fil très-délié.

5° Les lois qui précèdent ne sont exactes qu'approximativement : si l'on se déplace de quantités considérables, soit sur la direction verticale, soit à la surface de la terre sur un même méridien, on reconnaît des variations sensibles dans la *direction* et dans l'*intensité* de la pesanteur. Ces variations, dont la cause et les lois sont assez bien connues, ne nous occuperont pas ici.

101. La détermination analytique du centre de gravité d'un solide résulte des formules du n° **76**. Soient p l'action de la pesanteur sur un point (x, y, z) du corps, P le poids total du corps; x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité. Nous aurons, en vertu de la théorie des forces parallèles,

$$P = \Sigma p, \quad Px_1 = \Sigma Px, \quad Py_1 = \Sigma Py, \quad Pz_1 = \Sigma Pz,$$

le signe Σ indiquant une sommation qui s'étend à tous les points matériels du corps. On peut transformer ces équations en introduisant les masses au lieu des poids. Soient m la masse du point (x, y, z); M la masse du corps ou la somme des masses de ses points; à cause de la relation $p = mg$, on a évidemment

$$P = \Sigma mg = g\Sigma m = Mg,$$

de sorte que *le poids d'un corps quelconque est le produit de sa masse par le nombre constant* g. Les équations qui donnent x_1, y_1, z_1 deviennent, par la suppression du facteur g dans les deux membres,

$$(1) \qquad Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my, \quad Mz_1 = \Sigma mz.$$

Les notions de *poids* et de *centre de gravité*, d'après ce qui précède, ne semblent convenir qu'à des corps solides : cependant, on a souvent à déterminer le poids et le centre de gravité d'un système matériel déformable, tel qu'une masse liquide. Il est évident qu'il faut entendre par là une quantité P et un point (x_1, y_1, z_1) déterminés par les formules

ci-dessus; ou, en d'autres termes, le poids et le centre de gravité du solide qu'on obtiendrait en supposant que tous les points de la masse proposée soient unis invariablement, sans que rien soit changé dans les positions qu'ils occupent à l'instant que l'on considère.

102. Les équations (1) sont, théoriquement, les vraies équations qui déterminent le centre de gravité d'un corps et définissent ses propriétés, mais elles ne conviennent pas au calcul effectif de la masse M et de la position du point G, parce que les points matériels échappent à nos mesures directes ainsi que leurs masses, et les *sommations* indiquées ne sont pas réalisables. C'est pourquoi on les remplace par des *intégrations*, à l'aide d'un artifice fort important dont nous verrons de nombreux exemples. Établissons quelques notions nécessaires.

On dit qu'un corps est *homogène* lorsqu'il présente dans tous ses points une constitution physique identique; sa *densité* est alors le rapport de la masse qu'il renferme sous un volume quelconque à ce volume. Si donc ρ désigne la densité du corps, V son volume, nous aurons

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad \text{ou} \quad M = V\rho.$$

Dans les corps *hétérogènes*, le rapport désigné par le nom de densité varierait d'une portion du corps à une autre; on procède donc comme il suit : si l'on décompose le volume du corps en éléments très-petits, le rapport de la masse d'une de ces parties à son volume sera la *densité moyenne* de l'élément, et l'on appelle *densité* du corps *en un point donné* (x, y, z) la densité moyenne d'une portion de volume extrêmement petite et renfermant ce point. On conçoit qu'il est permis de regarder cette densité, avec une très-grande approximation, comme une fonction continue ρ des coordonnées (x, y, z) du point auquel elle se rapporte. Nous supposerons cette fonction connue; dans les corps homogènes elle se réduira à une constante.

Cela posé, admettons que l'on veuille appliquer l'équation

$$Mx_1 = \Sigma mx$$

à un corps quelconque. On divisera son volume en éléments très-petits, dont l'un quelconque sera désigné par $\Delta\omega$; la masse de cet élément sera, d'après ce qui précède, $\rho\Delta\omega$, ρ étant la densité moyenne de l'élément, ou, ce qui revient au même, la densité du corps en un point déterminé

x, y, z) de l'élément. D'ailleurs, à cause de la petitesse extrême de $\Delta\omega$, on peut, sans erreur sensible, regarder x comme ayant la même valeur pour tous les points matériels qui y sont compris. La portion de la somme Σmx qui se rapporte à l'élément $\Delta\omega$ est donc égale, très-sensiblement, à $x.\rho\Delta\omega$, et l'on a par conséquent

$$Mx_1 = \Sigma\rho x\Delta\omega,$$

le signe Σ se rapportant maintenant, non plus à tous les points matériels du corps, mais à tous les éléments de volume $\Delta\omega$ de celui-ci. Or, cette somme ne diffère pas sensiblement de l'intégrale définie, s'étendant à tout le volume du corps, qui serait la limite de $\Sigma\rho x\Delta\omega$ si l'on faisait converger tous les éléments $\Delta\omega$ vers zéro. On remplacera donc l'équation précédente par celle-ci :

$$Mx_1 = \int\rho x d\omega,$$

$d\omega$ désignant un élément infiniment petit du volume du corps, et le signe $\int$ une intégrale, généralement triple, qui s'étend à tout le volume du corps. Un raisonnement semblable est applicable au calcul de M, y_1, z_1, et l'on a ainsi, au lieu des formules (1), les suivantes qui sont immédiatement appropriées au calcul :

$$(2) \qquad M = \int\rho d\omega, \quad Mx_1 = \int\rho x d\omega, \quad My_1 = \int\rho y d\omega, \quad Mz_1 = \int\rho z d\omega.$$

103. On considère fréquemment le centre de gravité d'une ligne, d'une surface. Pour cela, on conçoit que l'on ait distribué une certaine masse, soit uniformément, soit suivant une loi donnée, sur toute la ligne ou la surface dont il s'agit. La *densité en un point* M de la figure est toujours la densité moyenne (ou le rapport de la masse à l'étendue) d'une portion excessivement petite de la ligne ou de la surface, renfermant le point M : elle est exprimée par une fonction ρ, que l'on suppose connue, des coordonnées de ce point. Les équations (2) s'appliquent d'ailleurs immédiatement à la détermination de la masse et du centre de gravité d'une portion de ligne ou de surface : il suffit d'y considérer $d\omega$ comme représentant, dans le premier cas, un arc infiniment petit ds de la courbe ; dans le second, un élément $d\sigma$ de la surface. Les intégrales indiquées par $\int$ seront simples dans le premier cas, doubles dans le second.

Si l'on se borne, comme nous le ferons dans les problèmes suivants, au cas d'une figure homogène, ρ est une constante donnée, et la première des équations (2) devient

$$M = \rho\int d\omega,$$

équation dans laquelle il est visible que $\int d\omega$ représente la longueur totale de l'arc, ou l'aire totale de la surface, ou le volume total du corps. Les trois autres deviennent, par la substitution de la valeur de M et la suppression du facteur ρ,

$$(3)\qquad x_1\int d\omega = \int x d\omega,\quad y_1\int d\omega = \int y d\omega,\quad z_1\int d\omega = \int z d\omega.$$

Nous allons appliquer ces formules, successivement, à la détermination des centres de gravité des lignes, des surfaces et des solides homogènes.

104. *Centres de gravité des lignes.* — Soit s la longueur d'un arc de courbe AB ; on a ici (Cours d'An., 289)

$$d\omega = ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}},\quad \int d\omega = s,$$

et x_1, y_1, z_1 sont déterminés par les équations

$$(4)\qquad sx_1 = \int x ds,\quad sy_1 = \int y ds,\quad sz_1 = \int z ds.$$

On commence par chercher la valeur de s par la formule donnée dans le calcul intégral ; puis on remplace dans les équations (4) ds par sa valeur ci-dessus, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ étant fournis par les équations de la courbe proposée. Les limites des intégrales (4) se rapportent aux extrémités de l'arc AB, et sont les mêmes que pour évaluer la longueur de l'arc s.

Si la courbe est plane, il suffit de prendre son plan pour plan XY ; z, z_1 sont nuls ; on a

$$(5)\qquad ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},\quad sx_1 = \int x ds,\quad sy_1 = \int y ds.$$

105. *Centres de gravité des aires planes.* — Soit S l'aire comprise entre la courbe BM, l'axe des x, et deux ordonnées AB, MP. Décomposons cette aire en éléments infiniment petits par des parallèles à OX et à OY, en sorte que l'élément $d\omega$ soit ici le rectangle dont les côtés ont pour valeurs dx, dy. Nous aurons donc

$$d\omega = dxdy,\quad \int d\omega = S,$$

et l'aire S se calculera par les méthodes connues (cours d'An., 271). Ensuite, appliquant les formules (3) et employant le mode de raisonnement bien connu dont nous avons fait usage dans le calcul intégral (301, 308), nous aurons

$$Sx_1 = \int xdx\int dy,\quad Sy_1 = \int dx\int ydy,$$

les limites des intégrations relatives à y et à x étant les mêmes que pour évaluer l'aire de la surface S; ou encore, en effectuant l'intégration relative à y, et désignant actuellement par y l'ordonnée de la courbe BM,

$$(6) \qquad Sx_1 = \int_{x_0}^{x} xy\,dx, \quad Sy_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} y^2 dx,$$

les valeurs x_0, x de l'abscisse se rapportant aux points B, M.

Si l'aire S était comprise entre deux courbes BM, B'M', et deux ordonnées AB, MP, en désignant par y_0 la fonction de x qui représente l'ordonnée de la courbe B'M', et opérant comme ci-dessus, on aurait y_0 au lieu de o pour limite inférieure de l'intégrale par rapport à y, et l'on trouverait



$$(7) \qquad Sx_1 = \int_{x_0}^{x} (y - y_0)\,x\,dx, \quad Sy_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2)\,dx.$$

106. *Centres de gravité des surfaces courbes quelconques.* — Soit S l'aire d'une portion de surface courbe limitée par un contour donné A'B'C'D' qui se projette sur le plan XY suivant ABCD. Désignons par ν l'angle aigu que fait avec l'axe des z la normale à la surface en un point (x, y, z); par p, q les dérivées partielles de z en x et y tirées de l'équation de la surface donnée. Décomposant la surface en éléments par deux systèmes de plans perpendiculaires respectivement à OX et à OY, et raisonnant comme nous l'avons fait pour la quadrature des surfaces courbes (Cours d'An., N° 308), on trouvera

$$d\omega = \frac{dx\,dy}{\cos\nu}, \quad \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\int d\omega = S = \int dx \int \frac{dy}{\cos\nu},$$

$$(8) \qquad Sx_1 = \int x\,dx \int \frac{dy}{\cos\nu}, \quad Sy_1 = \int dx \int \frac{y\,dy}{\cos\nu}, \quad Sz_1 = \int dx \int \frac{z\,dy}{\cos\nu}.$$

Les variables z, p, q, sont des fonctions de x, y fournies par l'équation de la surface; les limites des intégrales relatives à y et x se déduisent, comme nous l'avons exposé dans le calcul intégral, de l'équation du contour ABCD.

107. *Centres de gravité des solides.* — Considérons un corps homo-

gène compris sous une surface fermée, dont l'équation en coordonnées rectangulaires est

$$F(x, y, z) = 0;$$

soit V son volume; décomposons-le en éléments infiniment petits en tous sens par trois systèmes de plans respectivement perpendiculaires à OX, OY, OZ. L'élément de volume sera donc un parallélipipède rectangle ayant pour arètes les distances dx, dy, dz qui séparent deux plans consécutifs de chacun des systèmes, en sorte que l'on aura

$$d\omega = dxdydz, \quad V = \int d\omega.$$

Si l'on fait d'abord la somme des éléments compris dans un même prisme vertical et pour lesquels x, y, dx, dy sont constants, cette somme pourra être remplacée par

$$dxdy\int_{z_0}^{z} dz = (z - z_0)\, dxdy,$$

z_0 et z représentant les deux ordonnées qui répondent à un même système de valeurs de x, y dans l'équation de la surface. Sommant ensuite tous les éléments compris entre deux plans x, $x + dx$, et pour lesquels x et dx sont constants; puis toutes les tranches semblables comprises dans le volume V, on aura enfin

$$V = \int dx \int (z - z_0)\, dy;$$

les limites d'intégration relatives à y sont la plus petite et la plus grande valeur de cette variable qui répondent à un même x sur la surface donnée; les limites par rapport à x sont la plus petite et la plus grande valeur de cette variable qui répondent à des points réels de la surface donnée. Nous avons expliqué dans le *Cours d'Analyse* (306) comment se fait la détermination de ces limites.

Si l'on remplace $d\omega$ par $dx\,dy\,dz$ dans les formules (3) et que l'on opère absolument comme nous venons de l'indiquer, en effectuant successivement les intégrations en z, en y et en x, on trouvera de la même manière

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} Vx_1 = \int dx \int (z - z_0)\, dy, \quad Vy_1 = \int dx \int (z - z_0) dy, \\ Vz_1 = \frac{1}{2} \int dx \int (z^2 - z_0^2)\, dy, \end{array} \right.$$

les limites des intégrales étant les mêmes que dans l'évaluation du

volume V. Les fonctions de x, y désignées par z_0 et z se tireront de l'équation $F(x, y, z) = 0$ de la surface proposée.

Les formules relatives aux centres de gravité des lignes, surfaces et volumes non homogènes seraient un peu moins simples, mais elles se déduiraient de la même façon des équations (2). Ainsi, pour un corps hétérogène, on trouverait

$$M = \int dx \int dy \int \rho dz,$$

$$Mx_1 = \int x dx \int dy \int \rho dz, \quad My_1 = \int dx \int y dy \int \rho dz, \quad Mz_1 = \int dx \int dy \int \rho z dz,$$

et l'on y substituerait pour ρ la fonction de x, y, z qui représente la densité du corps, après quoi l'on aurait à effectuer trois intégrations dont les limites seraient les mêmes que celles qui se rapportent au volume du corps.

108. *Remarques diverses.* — 1° La décomposition d'un volume ou d'une surface en éléments infiniment petits dans tous les sens peut se faire de bien des manières différentes : celle que nous avons adoptée ci-dessus se présente naturellement lorsque l'on fait usage de coordonnées rectangulaires, mais il est des cas où les intégrations se simplifient beaucoup lorsqu'on adopte d'autres modes de décomposition. Nous en avons donné des exemples dans le calcul intégral (Cours d'An., 507, 511), et ce que nous avons dit à ce sujet suffit complètement.

2° La recherche des centres de gravité des espaces homogènes est simplifiée, dans bien des cas, par certaines remarques dont voici les plus essentielles : Si cet espace (ligne, surface, volume) admet un centre de figure O, le centre de gravité coïncide avec le point O. En effet, on peut alors décomposer la figure en éléments infiniment petits $d\omega$ qui soient deux-à-deux égaux et symétriquement placés par rapport au point O. Les moments $x\,d\omega$ de deux de ces éléments par rapport à un plan YZ passant par le point O seront donc égaux, mais de signes contraires ; l'intégrale $\int x d\omega$ étendue à toute l'espace dont on cherche le centre de gravité sera donc nulle, et, en vertu des équations (3), on aura $x_1 = 0$. On prouverait de même que y_1 et z_1 sont nuls si O est pris pour origine, donc le centre de gravité coïncide avec ce point.

3° Si le contour d'une aire plane admet un diamètre AB qui partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à une certaine direction, le centre de gravité G de l'aire est sur AB. Car on

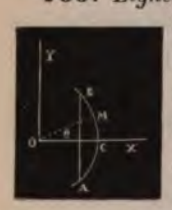
peut, par des parallèles aux cordes et au diamètre, partager cette aire en éléments deux-à-deux égaux, et situés à égale distance de part et d'autre du diamètre AB. Si l'on prend AB pour axe des x, les moments $yd\omega$ de ces deux éléments seront égaux et de signes contraires, l'intégrale $\int yd\omega$ étendue à l'aire entière sera nulle, et en vertu des formules (3), y_1 sera nul, ce qui démontre la proposition.

On verrait de même que si la surface qui termine un solide admet un plan diamétral partageant en deux parties égales toutes les cordes parallèles à une même direction, le centre de gravité du solide est dans ce plan.

4° Enfin, si une ligne homogène possède un axe de symétrie, un raisonnement pareil aux précédents montre que le centre de gravité de la ligne est sur cet axe.

Les exemples suivants sont destinés à éclaircir l'application des formules générales.

109. *Lignes homogènes*. — I. *Arc de cercle*. — Rapportons le cercle à deux diamètres rectangulaires, dont l'un OX, passe par le milieu C de l'arc AB. D'après l'une des remarques faites ci-dessus, le centre de gravité de l'arc AB est sur OX, il suffit de déterminer x_1. Soient a le rayon du cercle, s la longueur de l'arc AB, c sa corde, θ l'angle qui fait avec OX le rayon correspondant à un élément ds. Les formules (4) donnent



$$sx_1 = \int x\, ds,$$

et l'on a

$$x = a\cos\theta, \quad ds = a d\theta,$$

les limites d'intégrations par rapport à θ étant $-\frac{s}{2a}$, $+\frac{s}{2a}$; donc

$$sx_1 = 2a^2 \sin\frac{s}{2a} = ac, \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{ac}{s}.$$

Le centre de gravité de l'arc de cercle est sur le rayon mené par le milieu de l'arc, à une distance du centre qui est une quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.

II. *Arc de cycloïde*. — Les équations de la courbe étant sous la forme ordinaire,

$$x = a(\omega - \sin\omega), \quad y = a(1 - \cos\omega),$$

soient o et ω les valeurs de l'angle ω qui correspondent aux extrémités de l'arc donné. On a, comme on sait,

$$ds = 2a \sin\frac{\omega}{2}\,d\omega,$$

d'où

$$\int x ds = 2a^2\int(\omega - \sin\omega)\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega.$$

Effectuant les intégrations indiquées, on trouvera

$$\int \omega \sin\frac{\omega}{2}\,d\omega = 4\sin\frac{\omega}{2} - 2\omega\cos\frac{\omega}{2} + C,$$

$$\int \sin\omega \sin\frac{\omega}{2}\,d\omega = 2\int \sin^2\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\,d\omega = \frac{4}{3}\sin^3\frac{\omega}{2} + C.$$

De même

$$\int y ds = 2a^2\int(1 - \cos\omega)\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega = 4a^2\int \sin^3\frac{\omega}{2}\,d\omega$$

$$= 4a^2\int\left(1 - \cos^2\frac{\omega}{2}\right)\sin\frac{\omega}{2}\,d\omega = 8a^2\cos\frac{\omega}{2}\left(-1 + \frac{1}{3}\cos^2\frac{\omega}{2}\right) + C.$$

Entre les limites o et ω, on trouvera

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right), \quad sx_1 = \int_0^\omega x ds = 4a^2\left(2\sin\frac{\omega}{2} - \omega\cos\frac{\omega}{2} - \frac{2}{3}\sin^3\frac{\omega}{2}\right),$$

$$sy_1 = 8a^2\left(\frac{2}{3} - \cos\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{\omega}{2}\right).$$

Pour une arcade complète, $\omega = 2\pi$; il vient

$$s = 8a, \quad sx_1 = 8\pi a^2, \quad sy_1 = \frac{32}{3}a^2,$$

d'où, enfin,

$$x_1 = \pi a, \quad y_1 = \frac{4}{3}a.$$

Le centre de gravité est donc sur l'ordonnée maximum, à une distance de la base égale aux deux tiers de cette ordonnée.

III. *Arc d'hélice.* — Les équations de l'hélice étant

$$x = a\sin\frac{z}{m}, \quad y = a\cos\frac{z}{m}, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

et les extrémités de l'arc ayant pour cordonnées (o, o, o) et (x, y, z), on trouve facilement

$$ds = \frac{dz}{m}\sqrt{a^2 + m^2}, \quad s = \frac{z}{m}\sqrt{a^2 + m^2},$$

$$\int x ds = \frac{a\sqrt{a^2 + m^2}}{m}\int_0^z \sin\frac{z}{m} dz = \sqrt{a^2 + m^2}(a - y),$$

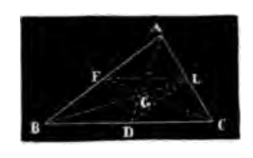
$$\int y ds = a\sqrt{a^2 + m^2}\sin\frac{z}{m} = x\sqrt{a^2 + m^2}, \quad \int z ds = \frac{z^2}{2m}\sqrt{a^2 + m^2},$$

d'où, par les équations (4),

$$x_1 = \frac{m(a - y)}{z}, \quad y_1 = \frac{mx}{z}, \quad z_1 = \frac{z}{2},$$

ce qui fournit une construction facile du centre de gravité de l'arc d'hélice.

110. *Aires planes.* — I. *Triangle.* — La droite AD qui joint un sommet A au milieu D du côté opposé est un diamètre dont les cordes conjuguées sont parallèles à ce côté; le centre de gravité de l'aire du triangle est donc sur cette droite. Le même raisonnement s'appliquant aux deux autres médianes BL, CF, *les trois médianes d'un triangle* ABC *se coupent en un même point* G, *centre de gravité de l'aire du triangle.*



La droite DL est parallèle au côté AB et en vaut la moitié : les triangles semblables AGB, DGL donnent donc l'égalité

$$\mathrm{DG} = \frac{1}{2}\mathrm{AG} = \frac{1}{3}\mathrm{AD}.$$

Le centre de gravité de l'aire du triangle est donc sur la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé, aux deux tiers de cette droite à partir du sommet.

On détermine le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque en le décomposant en triangles par des diagonales, et appliquant au centre de gravité de chacun de ces triangles, construit par la règle ci-dessus, un poids proportionnel à l'aire du triangle.

II. *Segment circulaire.* — L'équation du cercle étant

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

l'aire S du segment OBMP compris entre la courbe, l'axe des x, et deux ordonnées correspondant aux abscisses o et x, a pour expression

$$S = \int_0^x dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc sin}\frac{x}{a}.$$

On a ensuite par les formules (6),

$$Sx_1 = \int_0^x xydx = \int_0^x xdx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^3 - (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3},$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2dx = \frac{1}{2}\int_0^x (a^2 - x^2)\,dx = \frac{a^2x}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

Si l'on fait $x = a$, le segment devient égal au quart du cercle, et l'on a

$$S = \frac{\pi a^2}{4},\quad x_1 = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi},\quad y_1 = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi} = x_1,$$

ce qui montre, chose d'ailleurs évidente, que le centre de gravité est sur la bissectrice de l'angle XOY.

III. *Secteur circulaire.* — Le secteur compris entre la circonférence et deux rayons donnés se décompose en secteurs infiniment petits égaux par des rayons équidistants. Chacun de ces éléments étant considéré comme un triangle, son centre de gravité se trouve sur le rayon bissecteur, aux deux tiers de sa longueur à partir du centre. Considérant le poids de chaque élément comme appliqué à son centre de gravité, on est ramené à chercher le centre de gravité d'un arc de cercle homogène, dont le rayon égale les deux tiers du rayon donné, c'est-à-dire à un problème résolu (**109**).

IV. *Segment de cycloïde.* — Les équations de la courbe sont celles du n° **109**, ex. II. L'aire S du segment compris entre la courbe, sa base et l'ordonnée qui répond à l'angle donné ω, a pour valeur

$$S = a^2\int_0^\omega (1 - \cos\omega)^2\,d\omega = a^2\left(\frac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \frac{1}{2}\sin\omega\cos\omega\right) \text{(1)}.$$

On a ensuite

$$\int xydx = a^3\int(\omega - \sin\omega)(1 - \cos\omega)^2\,d\omega = a^3\left[\frac{3}{4}\omega^2 - 2\cos\omega - 2\omega\sin\omega - \frac{1}{4}\sin^2\omega + \frac{1}{2}\omega\sin\omega\cos\omega - \frac{1}{3}(1 - \cos\omega)^3\right] + C,$$

(1) Cours d'Analyse, 276.

ou, en prenant l'intégrale entre les limites o et ω,

$$Sx_1 = a^3 \left[2 + \frac{3}{4}\omega^2 - 2\cos\omega - 2\omega\sin\omega - \frac{1}{4}\sin^2\omega + \frac{1}{2}\omega\sin\omega\cos\omega - \frac{1}{3}(1 - \cos\omega \right.$$

De même, on aura

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int y^2 dx = \frac{a^3}{2}\int_0^\omega (1 - \cos\omega)^3 d\omega = \frac{a^3}{2}\left(\frac{5}{2}\omega - 4\sin\omega + \frac{3}{4}\sin 2\omega + \frac{1}{3}\sin^3\omega \right.$$

Pour appliquer ces formules à une arcade entière de la cycloïde, on fera $\omega = 2\pi$, ce qui donnera

$$S = 3\pi a^2, \quad Sx_1 = 3\pi^2 a^3, \quad Sy_1 = \frac{5\pi a^3}{2},$$

$$x_1 = \pi a, \quad y_1 = \frac{5}{6}a.$$

111. — *Aires courbes.* — Considérons la surface engendrée par la révolution, autour d'une droite OX, d'une courbe plane donnée par son équation

$$y = f(x),$$

et cherchons le centre de gravité de l'aire S comprise sur cette surface entre deux plans, x_0 et x, perpendiculaires à l'axe. Comme le centre de gravité cherché est sur l'axe OX, puisque tout plan passant par cet axe est un plan de symétrie, il suffit de trouver S et x_1. On a, comme on sait,

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y ds \quad \text{(Cours d'An., 208).}$$

Coupons la surface par des plans infiniment voisins perpendiculaires à OX ; dans l'équation

$$Sx_1 = \int x d\omega,$$

comme x est constant pour tous les éléments $d\omega$ de la surface compris entre deux plans sécants x et $x+dx$, on peut faire d'abord la somme de tous ces éléments, ce qui donne, comme nous l'avons vu dans le *Cours d'Analyse*, en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur,

$$2\pi y ds.$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$Sx_1 = 2\pi \int_{x_0}^{x} xy ds.$$

C'est la formule d'où l'on déduit le centre de gravité d'une surface de révolution. En voici quelques exemples :

I. *Zône sphérique.* — La zône comprise entre deux petits cercles parallèles sur la sphère est engendrée par un arc de cercle BM, tournant autour de l'axe commun des deux petits cercles. Cet axe étant pris pour axe des x, l'équation de la courbe génératrice est

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

et l'on a

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{adx}{y}, \quad yds = adx;$$

donc, en désignant par x_0, x les valeurs de x correspondantes aux extrémités B, M de l'arc générateur,

$$S = 2\pi a \int_{x_0}^{x} dx = 2\pi a (x - x_0), \quad Sx_1 = 2\pi a \int_{x_0}^{x} xdx = \pi a (x^2 - x_0^2),$$

d'où

$$x_1 = \frac{x_0 + x}{2}.$$

Ainsi *le centre de gravité d'une zône sphérique se trouve au milieu de la droite qui joint les centres de ses bases.*

II. *Tronc de cône à bases parallèles.* — Plaçant l'origine au sommet du cône, on a ici

$$y = ax, \quad ds = dx\sqrt{1 + a^2}, \quad S = \pi a \sqrt{1 + a^2}(x^2 - x_0^2),$$

x_0, x se rapportant aux deux bases. Ensuite

$$Sx_1 = 2\pi a \sqrt{1 + a^2} \int_{x_0}^{x} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi a \sqrt{1 + a^2}(x^3 - x_0^3),$$

d'où enfin

$$x_1 = \frac{2}{3}\frac{x^3 - x_0^3}{x^2 - x_0^2}.$$

III. *Surface engendrée par la révolution de la lemniscate autour de son axe focal.* — On a, en coordonnées polaires, pour l'équation de la courbe génératrice,

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad \text{d'où} \quad ds = \frac{ad\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{a^2 d\theta}{r},$$

l'arc s étant compté dans le même sens que l'angle θ. Soient θ_0, θ les valeurs de cet angle aux extrémités de l'arc générateur. On aura

$$S = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} r \sin\theta \cdot \frac{a^2 d\theta}{r} = 2\pi a^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

$$Sx_1 = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta} r^2 \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{a^2 d\theta}{r} = \pi a^3 \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}} \sin 2\theta d\theta$$

$$= \frac{\pi a^3}{3}\left(\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta_0 - \cos^{\frac{3}{2}} 2\theta\right) = \frac{\pi}{3}(r_0^3 - r^3).$$

L'abscisse du centre de gravité de l'aire proposée est donc

$$x_1 = \frac{1}{6a^2} \frac{r_0^3 - r^3}{\cos\theta_0 - \cos\theta}.$$

Pour $\theta_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, l'arc générateur devient le quart de la lemniscate, et l'on a

$$S = \sqrt{2} \cdot \pi a^2 (\sqrt{2} - 1), \quad x_1 = \frac{a}{3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}.$$

112. *Surfaces courbes quelconques.* — I. Centre de gravité de l'aire du *cône* $z^2 = 2xy$ comprise entre les plans $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

On trouve facilement (Cours d'An., 310)

$$\frac{1}{\cos\nu} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{x + y}{\sqrt{2xy}}, \quad S = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} \sqrt{ab}(a + b).$$

Appliquant ensuite les formules (8), on trouve

$$Sx_1 = \int_0^a x dx \int_0^b \frac{(x + y)}{\sqrt{2xy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx \int_0^b y^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{9}\right).$$

$$Sy_1 = \int_0^a dx \int_0^b \frac{(x + y)\,y}{\sqrt{2xy}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx \int_0^b y^{\frac{1}{2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^b y^{\frac{3}{2}} dy$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{9} + \frac{b}{5}\right).$$

$$Sz_1 = \int_0^a dx \int_0^b z dy \cdot \frac{x + y}{z} = \frac{ab}{2}(a + b).$$

Substituant à S sa valeur, on aura donc

$$x_1 = \frac{3a}{a+b}\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{9}\right), \quad y_1 = \frac{3b}{a+b}\left(\frac{a}{9}+\frac{b}{5}\right), \quad z_1 = \frac{3\sqrt{ab}}{2^{\frac{5}{2}}}.$$

II. *Centres de gravité des figures sphériques.* — Soient a le rayon de la sphère; YZ, XZ, XY trois plans diamétraux rectangulaires; S l'aire d'une figure quelconque tracée sur la surface; S_x, S_y, S_z ses projections sur les plans YZ, XZ, XY. Soient enfin $d\omega$, $d\omega'$ un élément de la surface et sa projection sur le plan XY, en sorte que

$$d\omega' = d\omega \cos \nu.$$

Les formules (3) donnent ici directement

$$Sz_1 = \int z d\omega = \int a \cos \nu d\omega = a\int d\omega' = aS_z.$$

On trouve de même, en projetant sur YZ et XZ,

$$Sx_1 = aS_x, \qquad Sy_1 = aS_y,$$

d'où les équations

$$\frac{x_1}{S_x} = \frac{y_1}{S_y} = \frac{z_1}{S_z} = \frac{a}{S},$$

qui déterminent x_1, y_1, z_1. Ce théorème remarquable facilite dans beaucoup de cas la recherche des centres de gravité des aires sphériques, car la propriété exprimée par l'équation $Sz_1 = aS_z$ s'applique évidemment à la projection sur un plan diamétral quelconque.

113. *Volumes homogènes.* — I. *Tétraèdre.* — Soit ABCD le tétraèdre donné; le plan AED mené par l'arête AD et le milieu E de l'arête opposée est évidemment un plan diamétral pour les cordes parallèles à BC : il renferme donc (**108**, 3°) le centre de gravité du volume du tétraèdre. Cette propriété étant vraie pour chacun des plans médians AFB, etc., on voit que, *dans le tétraèdre, les six plans menés chacun par une des arêtes et par le milieu de l'arête opposée se coupent en un même point, centre de gravité du tétraèdre.*



L'intersection AH des plans AED, AFB renferme donc le centre de gravité cherché : mais H, rencontre des médianes DE, BF du triangle BCD, est le centre de gravité de l'aire de ce triangle; donc, *dans le tétraèdre, les quatre droites qui joignent chacune un sommet du tétraèdre au centre*

de gravité de la face opposée se coupent en un même point, centre de gravité du tétraèdre.

Soit donc K le centre de gravité de la face ABC; le centre de gravité du tétraèdre est à l'intersection G des droites AH, DK, d'après ce qui précède. Mais on sait que

$$EH = \frac{1}{3} ED, \qquad EK = \frac{1}{3} EA,$$

donc KH est parallèle à AD et en vaut le tiers. D'où il suit, par les triangles semblables KGH, AGD, que

$$GH : GA = KH : AD = 1 : 3, \quad \text{d'où} \quad GH = \frac{1}{4} AH.$$

Le centre de gravité du volume du tétraèdre est sur la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée, aux trois quarts de cette droite à partir du sommet.

Enfin, la droite IF, intersection de deux plans médians AFB, CID, renferme nécessairement le centre de gravité G, et comme I, F sont respectivement les milieux des arêtes AB, CD; comme la même chose a lieu pour les autres couples d'arêtes opposées, *les trois droites qui joignent deux-à-deux les milieux des arêtes opposées du tétraèdre se coupent en un même point, centre de gravité du tétraèdre.* — On vérifie sans peine que le point G est le milieu de chacune de ces droites.

II. *Pyramide à base polygonale.* — On la décompose en tétraèdres par des plans menés par le sommet S et par les diagonales AC, AD, AE,.. du polygone base ABCDE... Menant un plan *abcde*... parallèle à la base, qui partage la hauteur SP de la pyramide dans le rapport de 3 à 1, ce plan, d'après ce qui précède, contiendra les centres de gravité G, G′, G″,... des tétraèdres, et par suite celui de la pyramide. Les poids des tétraèdres, appliqués en G, G′, G″,... sont proportionnels à leurs volumes, ou à leurs bases ABC, ACD, ADE,... puisque la hauteur SH est commune; ou encore, aux aires *abc*, *acd*, *ade*... des triangles suivant lesquels le plan *abcde*... coupe les tétraèdres. Donc le centre de gravité cherché coïncide avec celui de l'aire du polygone *abcde*...; donc *le centre de gravité* G_1 *de la pyramide est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base, aux trois quarts de cette droite à partir du sommet.*

On conclut delà, par la méthode des limites, que le centre de gravité du volume d'un cône à base quelconque se détermine par la même règle.

III. ***Centre de gravité du volume compris entre les plans coordonnés et la surface qui a pour équation.***

$$z = \frac{c}{ab}(a - x)(b - y).$$

D'après ce que nous avons établi dans le *Cours d'Analyse* (302), on a

$$V = \frac{c}{ab}\int_0^a dx \int_0^b (a - x)(b - y)\,dy = \frac{abc}{4}.$$

Appliquant ensuite les formules (9), nous aurons

$$Vx_1 = \frac{c}{ab}\int_0^a (a - x)\,x dx \int_0^b (b - y)\,dy = \frac{a^2bc}{12};$$

$$Vy_1 = \frac{c}{ab}\int_0^a (a - x)\,dx \int_0^b (b - y)\,y dy = \frac{ab^2c}{12};$$

$$Vz_1 = \frac{c^2}{2a^2b^2}\int_0^a (a - x)^2\,dx \int_0^b (b - y)^2\,dy = \frac{abc^2}{18}.$$

De là on tire

$$x_1 = \frac{a}{3}, \quad y_1 = \frac{b}{3}, \quad z_1 = \frac{2c}{9}.$$

IV. *Ellipsoïde.* — Cherchons le centre de gravité du volume compris entre l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les plans coordonnés, et un plan x quelconque.

Nous avons ici

$$z = c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et en posant

$$y' = b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{c}{b}\left(y'^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$V = \frac{c}{b}\int_0^x dx \int_0^{y'} (y'^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy.$$

Posons $y = y'\sin\varphi$, d'où $dy = y'\cos\varphi d\varphi$; il viendra

$$V = \frac{c}{b}\int_0^x y'^2 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi c}{4b}\int_0^x y'^2 dx,$$

ou en mettant pour y' sa valeur et effectuant le calcul,

$$V = \frac{\pi bc}{4}\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Calculons de la même manière Vx_1, par les formules (9) :

$$Vx_1 = \frac{c}{b}\int_0^x xdx\int_0^{y'}(y'^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}dy = \frac{c}{b}\int_0^x y'^2 xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi dy = \frac{\pi c}{4b}\int_0^x y'^2 xdx$$

$$= \frac{\pi bcx^2}{8}\left(1 - \frac{x}{2a^2}\right).$$

Pour Vy_1, nous aurons de même

$$Vy_1 = \frac{c}{b}\int_0^x dx\int_0^{y'}(y'^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}ydy = \frac{c}{b}\int_0^x y'^3dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{a}{3b}\int_0^x y'^3dx.$$

Si l'on fait encore $x = a\sin\psi$, d'où $dx = a\cos\psi d\psi$, on aura

$$\int_0^x y'^3dx = ab^3\int_0^\psi\cos^4\psi d\psi = ab^3\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\psi + \frac{3}{2\cdot 4}\sin\psi\cos\psi + \frac{1}{4}\sin\psi\cos^3\psi\right);$$

donc

$$Vy_1 = \frac{ab^2c}{8}\left(\psi + \sin\psi\cos\psi + \frac{2}{3}\sin\psi\cos^3\psi\right),\quad \psi = \arcsin\frac{x}{a}.$$

Enfin l'on trouve

$$Vz_1 = \frac{c^2}{2}\int_0^x dx\int_0^{y'}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = \frac{c^2}{2b^2}\int_0^x y'^3dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi$$

$$= \frac{c^2}{3b^2}\int_0^x y'^3dx = \frac{abc^2}{3}\int_0^\psi\cos^4\psi d\psi,$$

la valeur de cette intégrale étant donnée ci-dessus.

Si, dans ces diverses équations, on fait $x = a$, d'où $\psi = \frac{\pi}{2}$, on obtient pour le volume et le centre de gravité de la huitième partie de l'ellipsoïde :

$$V = \frac{\pi abc}{6},\quad x_1 = \frac{3a}{8},\quad y_1 = \frac{3b}{8},\quad z_1 = \frac{3c}{8}.$$

114. *Théorèmes de Guldin.* — Comme dernière application des formules relatives aux centres de gravité, démontrons les deux théorèmes remarquables qui portent le nom de Guldin.

1° Soient $y = f(x)$ l'équation d'une courbe plane ; x_0, x les abscisses correspondantes à deux points B, M de cette courbe ; s l'arc BM. L'ordonnée y_1 du centre de gravité de l'arc BM est donnée par la formule (4) :

$$sy_1 = \int_{x_0}^{x} yds ;$$

d'autre part, l'aire S de la surface de révolution engendrée par l'arc BM tournant autour de l'axe des x a pour expression

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} yds \quad \text{(Cours d'An., 289).}$$

Eliminant l'intégrale entre ces deux équations, on a

$$S = s \cdot 2\pi y_1.$$

L'aire engendrée par un arc de courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan a pour mesure le produit de l'arc générateur par la circonférence que décrit son centre de gravité. C'est le premier théorème de Guldin.

2° Soit S l'aire comprise entre les deux courbes planes BM, B'M', et deux ordonnées correspondantes aux abscisses x_0 et x. D'après les formules (7), l'ordonnée du centre de gravité de cette aire est donnée par l'équation

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2)\, dx,$$

y_0 et y se rapportant aux courbes B'M', BM. Mais le volume V engendré par l'aire S tournant autour de l'axe des x est donné (Cours d'An., 296) par l'équation

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - y_0^2)\, dx ;$$

donc

$$V = S \cdot 2\pi y_1,$$

c'est-à-dire que *le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe situé dans son plan a pour mesure le produit de l'aire génératrice par la circonférence qui décrit son centre de gravité.*

Ces deux théorèmes s'emploient utilement pour évaluer les surfaces et les volumes de révolution.

Exercices.

1. Soient M la masse d'un corps, R la distance de son centre de gravité G à un point donné O ; m la masse d'un point du corps, r sa distance au point O ; ρ sa distance au point G. Démontrer 1° que l'on a

$$\sum mr^2 = \mathrm{MR}^2 + \sum m\rho^2 ;$$

2° que la quantité $\sum mr^2$ est un minimum lorsque le point O est en G ; 3° que $\sum mr^2$ reste constant lorsque le point O se déplace sur une surface sphérique de centre G.

2. Soit u la distance de deux points m et m' du corps ; indiquons par S une somme qui s'étend à tous les couples de points du système pris deux-à-deux ; on a

$$\mathrm{S}mm'u^2 = \mathrm{M}\left(\sum mr^2 - \mathrm{MR}^2\right),$$

ou, d'après l'ex. 1,

$$\mathrm{S}mm'u^2 = \mathrm{M}\sum m\rho^2 .$$

3. Soient n points de masses égales. La somme des carrés des volumes des tétraèdres qui ont pour sommets les n points pris 4 à 4, de toutes les manières possibles, égale n fois la somme des carrés des volumes des tétraèdres qui ont pour sommets le centre de gravité du système des n points, et trois points quelconques du système.

4. Si l'on applique en un point O des forces dirigées vers tous les points d'un corps et respectivement proportionnelles aux masses de ces points multipliées par leurs distances au point O, la résultante de ces forces sera dirigée vers le centre de gravité du corps et sera proportionnelle à la masse M multipliée par la distance R du centre de gravité au point O. Si le point O est au centre de gravité, les forces se font équilibre.

5. C. de gr. d'un arc de chaînette symétrique par rapport à l'axe de la courbe.

R. On a, x et y se rapportant à l'extrémité,

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad s = a\left(e^{\frac{x}{a}} - a^{-\frac{x}{a}}\right), \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{2}y + \frac{ax}{s} .$$

6. C. de gr. d'une demi-boucle de la lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

R.
$$x_1 = \frac{a^2}{s\sqrt{2}}, \quad y_1 = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)}{s\sqrt{2}} .$$

7. C. de gr. de l'arc de la parabole $y^2 = 2px$ entre le sommet et le point (x, y).

R.
$$s = \frac{1}{2p}\left(x\sqrt{p^2+y^2} + p^2\,\mathrm{l.}\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right),$$

$$sx_1 = \frac{1}{2}\left(x+\frac{p}{4}\right)\sqrt{x^2+\frac{px}{2}} - \frac{p^2}{32}\,\mathrm{l.}\frac{4x+p+4\sqrt{x^2+\frac{1}{2}px}}{p},$$

$$sy_1 = \frac{1}{3p}\left(y^2+p^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{3} .$$

8. C. de gr. de l'arc compris entre l'origine et le point (x, y, z) sur la courbe

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2}.$$

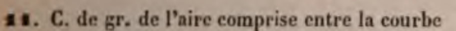
R. $\quad s = x + z, \quad x_1 = \frac{(2a+y)\,y}{2\,(x+z)}, \quad y_1 = \frac{(5a+3y)\,z}{5\,(x+z)}, \quad z_1 = \frac{(2a+z)\,z}{2\,(x+z)}.$

9. C. de gr. de l'aire du trapèze ABCD. — *R.* Prolongeons la base supérieure AB de BK = CD; la base inférieure CD, en sens contraire, de CH = AB. La droite HK coupe la droite FE qui joint les milieux des bases au C. de gr. du trapèze.



10. C. de gr. de l'aire du quadrilatère ABCD. — *R.* Soit L le point d'intersection des diagonales AC, BD. Prenons sur une diagonale AC un point F tel que AF = CL. La droite FE qui joint ce point F au milieu E de l'autre diagonale passe par le C. de gr. G, et l'on a

$$GE = \frac{1}{3}\,EF.$$



11. C. de gr. de l'aire comprise entre la courbe

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

et son asymptote $x = a$.

R. $$S = \frac{3\pi a^2}{4}, \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \frac{5}{6}\,a.$$

12. C. de gr. de l'aire comprise entre la courbe

$$y^2 = b^2\,\frac{a - x}{x}$$

et son asymptote $x = 0$.

R. $$S = \pi ab, \quad y = 0, \quad x_1 = \frac{a}{4}.$$

13. C. de gr. du segment compris entre la courbe

$$y = ax^m,$$

l'axe des x, et l'ordonnée du point (x, y).

R. $$S = \frac{xy}{m+1}, \quad x_1 = \frac{m+1}{m+2}\,x, \quad y_1 = \frac{m+1}{2m+1}\,\frac{y}{2}.$$

14. C. de gr. de l'aire comprise entre la droite $y = \beta x$ et le parabole $y^2 = 2px$.

R. Le point d'intersection a pour coordonnées

$$x' = \frac{2p}{\beta^2}, \quad y' = \frac{2p}{\beta}.$$

On trouve

$$S = \frac{2p^2}{3\beta^3}, \quad x_1 = \frac{2x'}{5}, \quad y_1 = \frac{y'}{2}.$$

15. C. de gr. de l'aire engendrée par un arc de cycloïde partant de l'origine, tournant autour de la base.

R.
$$S = 16\pi a^2\left(\frac{2}{3} - \cos\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{\omega}{2}\right).$$

$$Sx_1 = 16\pi a^3\left[\cos\frac{\omega}{2}\left(\omega - \sin\omega\right)\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{\omega}{2} - 1\right) + \frac{8}{9}\sin^3\frac{\omega}{2} + \frac{4}{15}\sin^5\frac{\omega}{2}\right].$$

Pour $\omega = 2\pi$,

$$x_1 = \frac{26}{15}a.$$

16. C. de gr. de la surface du paraboloïde de révolution, entre le sommet et un plan x perpendiculaire à l'axe.

R.
$$y^2 = 2px, \quad x_1 = \frac{1}{5}\frac{(3x - p)(2x + p)^{\frac{3}{2}} + p^{\frac{5}{2}}}{(2x + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}}.$$

17. C. de gr. de l'aire d'un triangle sphérique ABC.

R. Application du théorème sur les C. de gr. des aires sphériques. Soient α, β, γ les côtés respectivement opposés aux angles A, B, C; a le rayon de la sphère ; ξ, η, ζ les distances du C. de gr. aux plans de côtés α, β, γ. On a

$$\xi = \frac{a}{2}\frac{\alpha - \beta\cos C - \gamma\cos B}{A + B + C - 180^\circ}, \quad \eta = \frac{a}{2}\frac{\beta - \gamma\cos A - \alpha\cos C}{A + B + C - 180^\circ},$$

$$\zeta = \frac{a}{2}\frac{\gamma - \alpha\cos B - \beta\cos A}{A + B + C - 180^\circ}.$$

18. C. de gr. de la portion de surface du cône

$$x^2 + y^2 = b^2z^2$$

comprise entre les plans XZ, YZ, $x = a$.

R. On simplifie la solution en décomposant par des plans perpendiculaires à OX et des plans passant par OX. On obtient

$$S = \frac{\pi a^2 b}{4}\sqrt{1 + b^2}, \quad x_1 = \frac{2a}{3}, \quad y_1 = \frac{4ab}{3\pi}, \quad z_1 = \frac{4ab}{3\pi}.$$

19. C. de gr. du volume d'un secteur sphérique.

R. Soient a le rayon de la sphère, 2β l'angle au sommet du secteur. On a

$$x_1 = \frac{3}{4}a\cos^2\frac{1}{2}\beta.$$

20. C. de gr. du volume d'une tranche de paraboloïde de révolution.

R. a, b rayons des deux bases, h leur distance, x_1 la distance du C. de gr. à la base de rayon a.

$$x_1 = \frac{h}{3}\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}.$$

21. C. de gr. du solide compris entre les surfaces engendrées par la révolution des paraboles

$$y^2 = 2px, \quad y^2 = 2p'(a-x)$$

autour de leur axe commun.

R. Les limites d'intégration sont $x_0 = 0$, $x = \dfrac{ap'}{p+p'}$, et l'on a

$$x_1 = \frac{a}{3}\,\frac{p+2p'}{p+p'}.$$

22. C. de gr. du volume compris entre les plans XZ, XY, $x = a$, dans le cône de l'ex. 18.

R. $$V = \frac{\pi b^2 a^3}{12}, \quad x_1 = \frac{3a}{4}, \quad y_1 = z_1 = \frac{ab}{\pi}.$$

23. C. de gr. du volume compris entre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

et les trois plans YZ, XZ, XY.

24. C. de gr. du volume compris entre le paraboloïde

$$z^2 = 2xy$$

et les plans $z = 0$, $x = a$, $y = b$.

R. $$V = \frac{4\sqrt{2}}{9}(ab)^{\frac{3}{2}}, \quad x_1 = \frac{3}{5}a, \quad y_1 = \frac{3b}{5}, \quad z_1 = \frac{9}{16\sqrt{2}}\sqrt{ab}.$$

25. Trouver le volume compris entre le cylindre

$$y^2 = 2ax - x^2$$

et les plans $z = \beta x$, $z = \beta' x$, et le C. de gr. de ce volume.

R. $$V = \pi(\beta' - \beta)a^3, \quad x_1 = \frac{5}{4}a, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \frac{5}{8}a(\beta + \beta').$$

26. Centre de gravité de volume compris entre les trois plans coordonnés YZ, XZ, XY et la surface qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

R. $$V = \frac{\pi a^3}{70}, \quad x_1 = \frac{3\cdot 7}{2^7}a, \quad y_1 = \frac{3\cdot 7}{2^7}a, \quad z_1 = \frac{3\cdot 7}{2^7}a.$$

27. *Théorèmes de Guldin.* — Volume engendré par la révolution de l'aire d'une arcade de cycloïde tournant autour de sa base.

R. $$V = 5\pi^2 a^3.$$

28. Volumes engendrés par la révolution du segment compris entre la parabole

$$y^2 = 2px,$$

son axe et une ordonnée quelconque, tournant 1° autour de l'axe; 2° autour de la tangente au sommet; 3° autour de l'ordonnée qui le termine.

R. $$V=\frac{\pi}{2}xy^2;\quad V'=\frac{4\pi}{5}x^2y;\quad V''=\frac{8\pi}{15}x^2y.$$

29. *Densité variable.* — Une courbe plane dont la densité ρ est une fonction donnée $f'(s)$ de l'arc s compté d'une origine A, est déterminée par la condition que l'ordonnée du centre de gravité d'un arc quelconque AM soit elle-même une fonction donnée $\varphi(s)$ de l'arc s. Trouver l'équation de cette courbe.

R. On trouve

$$y=\frac{1}{f'(s)}\frac{d}{ds}\varphi(s)f(s)=\psi(s),$$

$$x=\int_0^s ds\sqrt{1-\psi'(s)^2}.$$

Ex. : soient $\rho=\frac{s^3}{4}$, $y_1=s^2$. On trouve, en posant

$$s=\frac{1}{3}\sin\varphi,\quad y=\frac{1}{6}\sin^2\varphi,\quad x=\frac{1}{6}\left(\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right),$$

équations où l'on reconnait une cycloïde.

CHAPITRE XVII.

APPLICATION DES PRINCIPES DE LA STATIQUE A L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE. THÉORIE DE LA CHAINETTE.

115. Lorsqu'on suppose, dans le polygone funiculaire considéré au nº **95**, que tous les points matériels du fil soient sollicités par des forces données et très-petites, les côtés du polygone ou les distances des points consécutifs du fil étant alors d'une petitesse extrême, il est avantageux de regarder la figure du fil comme une courbe continue, et d'employer un artifice de calcul semblable à celui dont on a fait usage dans les théories des centres de gravité (**102**), pour introduire la continuité là où, en réalité, elle n'existe pas.



Rapportons les points du fil en équilibre à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ; soit M (x, y, z) un de ces points. Si l'on divise la somme des composantes, parallèles à chaque axe, des

forces données qui sollicitent un élément très-petit du fil dont le point M fasse partie, par la longueur de cet élément, et si l'on désigne par X, Y, Z ces rapports, la résultante P des forces X, Y, Z sera ce qu'on nomme *la force motrice au point* M, *rapportée à l'unité de longueur du fil*. On admet que P, X, Y, Z sont des fonctions données de x, y, z.

La tension T du fil au point M sera évidemment dirigée suivant la tangente en M à la courbe dessinée par le fil; elle sera, ainsi que ses composantes T_x, T_y, T_z, une fonction à déterminer des coordonnées x, y, z. Soit s l'arc de courbe terminé en M; Δs une très-petite portion MM′ du fil. Si on la considère comme libre, elle sera évidemment en équilibre entre les tensions MT, M′T′ qu'elle éprouve à ses extrémités, et les forces données qui agissent sur ses divers points : la somme des composantes de toutes ces forces parallèlement à OX devra donc être nulle. Or, les composantes des tensions en M et M′ sont $-T_x$, $T_x + \Delta T_x$; la somme des composantes des forces élémentaires est égale, d'après la définition ci-dessus, à $X\Delta s$. Nous avons donc

$$-T_x + T_x + \Delta T_x + X\Delta s = 0,$$

ou en réduisant, remplaçant les quantités très-petites par des infiniment petits, et opérant de même pour les axes OY, OZ,

$$(1) \qquad dT_x + X ds = 0, \quad dT_y + Y ds = 0, \quad dT_z + Z ds = 0.$$

Ces équations sont *nécessaires* pour l'équilibre du fil; réciproquement, si elles sont vérifiées en chaque point du fil et si les extrémités A et B de celui-ci sont maintenues en équilibre par des forces convenables ou par des points fixes, on voit facilement que l'équilibre aura lieu. En effet, concevons que l'on parte du point A et que l'on donne successivement au fil en tous ses points la figure et la tension convenables pour que l'équilibre ait lieu entre les forces données qui sollicitent le fil et la tension au point A, ce qui sera évidemment possible. Comme la grandeur et la direction de la tension en chaque point devront satisfaire aux équations (1), d'après ce qui précède, et que d'autre part ces équations déterminent complétement la loi de variation des composantes T_x, T_y, T_z à partir du point A jusqu'à un point quelconque du fil, il est clair que les valeurs de T_x, T_y, T_z, et par conséquent la figure du fil en équilibre et sa tension, coïncideront respectivement en chaque point avec les valeurs de ces composantes dans l'état du fil où on le supposait primitivement. Celui-ci était donc en équilibre. Les équations (1) sont donc les équations nécessaires et

suffisantes de l'équilibre d'un fil flexible soumis à l'action de forces données et dont les extrémités sont en équilibre.

116. On donne aux équations (1) une autre forme, en se rappelant que si α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la tangente au fil en M, on a

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds};$$

$$T_x = T\alpha, \quad T_y = T\beta, \quad T_z = T\gamma,$$

(la direction de la tension étant prise dans le sens où s augmente). Donc on a

$$(2) \quad d\,.\,T\frac{dx}{ds} + X ds = 0, \quad d\,.\,T\frac{dy}{ds} + Y ds = 0, \quad d\,.\,T\frac{dz}{ds} + Z ds = 0.$$

Ou encore, en remplaçant T_x par αT, etc., et observant que si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale principale et R le rayon de courbure du fil, on a

$$d\,.\,\alpha T = \alpha dT + T d\alpha = \alpha dT + \frac{\lambda T}{R} ds,$$

$$d\,.\,\beta T = \beta dT + T d\beta = \beta dT + \frac{\mu T}{R} ds,$$

$$d\,.\,\gamma T = \gamma dT + T d\gamma = \gamma dT + \frac{\nu T}{R} ds,$$

on transforme les équations (1) dans les suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha \dfrac{dT}{ds} + \dfrac{\lambda T}{R} + X = 0, \\ \beta \dfrac{dT}{ds} + \dfrac{\mu T}{R} + Y = 0, \\ \gamma \dfrac{dT}{ds} + \dfrac{\nu T}{R} + Z = 0. \end{cases}$$

Multiplions celles-ci par α, β, γ et ajoutons les; à cause de la relation

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0,$$

il viendra

$$\frac{dT}{ds} + (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = 0,$$

ou, si l'on multiplie par ds,

$$dT + X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Dans le cas assez fréquent où X, Y, Z sont les dérivées partielles, par rapport à x, y, z respectivement, d'une même fonction $\varphi(x, y, z)$ de ces variables, et où l'on a conséquemment

$$X dx + Y dy + Z dz = d\varphi(x, y, z),$$

l'équation précédente donne

$$dT + d\varphi = 0,$$

d'où

$$T + \varphi = \text{const.}, \qquad T = \text{const.} - \varphi(x, y, z).$$

L'expression de la tension en un point quelconque du fil est donc ainsi donnée immédiatement en fonction des coordonnées de ce point.

117. Les équations (3) montrent encore évidemment, par les propriétés des résultantes (8), que la force P prise en sens contraire est la résultante de deux forces, l'une égale à $\frac{dT}{ds}$ dirigée suivant la tangente au fil; l'autre égale à $\frac{T}{R}$ dirigée suivant la normale principale. De là résultent les conséquences suivantes :

1° La direction de la force P, en chaque point du fil, est dans le plan osculateur de la courbe affectée par le fil; 2° si P_t, P_n désignent respectivement les composantes de P suivant la tangente et suivant la normale principale du fil, on aura

$$\frac{dT}{ds} = -P_t, \qquad \frac{T}{R} = -P_n.$$

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)^2 + \frac{T^2}{R^2} = P^2.$$

L'élimination de T entre les équations (2) conduit à deux relations assez compliquées qui sont les équations différentielles de la courbe formée par le fil.

Le cas particulier où la force P est dirigée, en chaque point du fil, normalement à celui-ci, comme cela a lieu par exemple lorsque le fil est simplement tendu sur une surface dont le frottement est négligeable, donne lieu à des conséquences remarquables. On a alors $P_t = 0$, et par suite

$$\frac{dT}{ds} = 0, \qquad T = \text{const.}$$

La tension est donc la même sur toute la longueur du fil. Ensuite, la direction de la force P étant, comme on l'a vu, dans le plan osculateur du fil, il s'ensuit que *le plan osculateur de la courbe affectée par le fil est, en chaque point, normal à la surface sur laquelle celui-ci est tendu,* propriété qui caractérise les *lignes géodésiques* ou lignes de longueur minimum sur une surface donnée. Enfin, la relation $T = -RP_n$ devient, T étant constant et P_n égal à P,

$$R = -\frac{T}{P}:$$

le rayon de courbure est en raison inverse de la force P, c'est-à-dire de la réaction normale de la surface.

118. *Équilibre d'un fil pesant.* — Concevons qu'un fil, dont les extrémités A et B sont fixes, soit soumis à l'action de la pesanteur seulement. D'après une remarque déjà faite (**97**), le fil en équilibre sera dans un plan vertical mené par les points A et B. Prenons ce plan pour plan XY, l'axe des x horizontal, l'axe des y vertical et en sens contraire de la pesanteur; soit ρ la densité du fil en un point quelconque (x, y). Les équations (2) nous donnent évidemment, dans ce cas où $X = 0$, $Y = g\rho$,

$$d.T\frac{dx}{ds} = 0, \quad d.T\frac{dy}{ds} - g\rho ds = 0,$$

c'est-à-dire, en intégrant et désignant par T_0, A des constantes,

$$T\frac{dx}{ds} = T_0, \quad T\frac{dy}{ds} = A + g\int_0^s \rho ds.$$

Donc, *en un point quelconque, la composante horizontale de la tension est constante, et sa composante verticale est proportionnelle au poids du fil, compté d'une origine déterminée.*

Supposons que le fil soit homogène ou que ρ soit une constante donnée. La seconde égalité deviendra

$$T\frac{dy}{ds} = A + g\rho s;$$

divisons-la par la première, et admettons que l'on prenne pour origine de l'arc s le point de la courbe affectée par le fil où la tangente est horizontale; A sera nul, et il viendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\rho}{T_0}s,$$

ou encore, si nous posons $T_0 = g\rho a$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}, \quad s = a\frac{dy}{dx} = a \operatorname{tang} \varphi,$$

φ désignant l'inclinaison de la tangente au fil sur l'axe des x. Cette équation est celle de la courbe d'équilibre du fil, entre les coordonnées s et φ. Pour obtenir l'équation entre x et y, observons que

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi, \quad ds = \frac{a\,d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

d'où

$$dx = \frac{a\,d\varphi}{\cos\varphi}, \quad dy = \frac{a \sin\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

et si l'on intègre,

$$y = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad x = a\,\mathrm{l.}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

l'origine des coordonnées étant choisie de telle manière que x soit nul et y égal à a au point où la tangente est horizontale.

Eliminons φ entre ces deux équations; nous avons

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}} = e^{\frac{x}{a}}, \quad \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{e^{\frac{x}{a}} - 1}{e^{\frac{x}{a}} + 1},$$

$$y = \frac{a}{\cos\varphi} = a\,\frac{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}},$$

et en remplaçant $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$ par sa valeur,

$$(4) \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Telle est l'équation demandée. La courbe qu'elle représente, et qui est celle que forme un fil homogène et pesant en équilibre, s'appelle *la chaînette*. Elle est symétrique par rapport à l'axe des y et le point C où la tangente est horizontale est en même temps le point le plus bas de la courbe; son ordonnée est a.

Quant à la tension, sa valeur est évidemment

$$T = \frac{T_0}{\cos\varphi} = \frac{g\rho a}{\cos\varphi} = g\rho y\,;$$

elle est proportionnelle à la sécante de l'inclinaison de la courbe ou à l'ordonnée verticale de celle-ci.

119. Les relations ci-dessus renferment plusieurs propriétés remarquables de la chainette; nous nous contentons d'indiquer les suivantes :

1° Les équations

$$y\cos\varphi = a, \qquad s = a\operatorname{tg}\varphi = y\sin\varphi$$

montrent que *si l'on abaisse du pied* P *de l'ordonnée une perpendiculaire* PQ *sur la tangente, la longueur de cette perpendiculaire est constante et égale à* OC, et *la distance* MQ *est égale à la longueur de l'arc* CM *de la chainette.*

2° La formule

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{\cos^2\varphi} = \frac{y^2}{a}$$

prouve que *le rayon de courbure est proportionnel au carré de la sécante de l'angle* φ.

3° On voit sans peine que l'on a

$$dx = \cos\varphi\, ds = \frac{a\,ds}{y}, \qquad y\,dx = a\,ds,$$

et en intégrant les deux membres de cette égalité à partir de $x = 0$, on trouve que l'*aire de la chainette entre les ordonnées* CO, MP, *égale celle du rectangle qui a pour côtés l'ordonnée* OC *et l'arc* CM *rectifié.*

120. Résolvons encore la question suivante : *étant donnés les points d'attache* A, B *et la longueur l du fil, déterminer la chainette.*

Tout revient à trouver le point C et le paramètre a. Soient x_0, y_0 les cordonnées du point A par rapport à l'origine O qui est inconnue, et $x_0 + h$, $y_0 + k$ celles du point B; h et k sont donnés, ce sont les projections horizontale et verticale de la droite AB. On a d'ailleurs pour la longueur d'un arc quelconque s compté du point le plus bas,

$$s = a\operatorname{tg}\varphi = a\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

d'où l'on tire, par l'équation (4),

$$y + s = ae^{\frac{x}{a}}, \quad y - s = ae^{-\frac{x}{a}}.$$

Appliquons ces équations au point A et au point B, et désignons par s_0 la valeur de s qui se rapporte au point A ; nous aurons

$$y_0 + s_0 = ae^{\frac{x_0}{a}}, \quad y_0 - s_0 = ae^{-\frac{x_0}{a}},$$

$$y_0 + k + s_0 + l = ae^{\frac{x_0+h}{a}}, \quad y_0 + k - s_0 - l = ae^{-\frac{x_0+h}{a}}.$$

De là nous tirons par soustraction

$$k + l = ae^{\frac{x_0}{a}}\left(e^{\frac{h}{a}} - 1\right), \quad k - l = ae^{-\frac{x_0}{a}}\left(e^{-\frac{h}{a}} - 1\right),$$

et par la multiplication membre à membre de ces dernières égalités

$$k^2 - l^2 = -a^2\left(e^{\frac{h}{2a}} - e^{-\frac{h}{2a}}\right)^2.$$

Si donc nous posons

$$\frac{h}{2a} = z, \quad \frac{2\sqrt{l^2 - k^2}}{h} = b,$$

nous aurons

$$\frac{e^z - e^{-z}}{z} = b.$$

On peut tirer la valeur de z de cette équation transcendante, soit par l'intersection d'une courbe et d'une droite, soit au moyen d'une table dressée par M. Broch (1), et de cette valeur de z on déduira celle de a, après quoi les équations ci-dessus donneront sans peine x_0, y_0, s_0, et par conséquent la position du point C et tous les éléments de la chaînette.

Exercices.

1. Dans un fil pesant en équilibre, on a toujours les relations suivantes :

$$T_0\frac{dy}{dx} - g\int_0^s \rho ds = 0; \quad R = \frac{T_0}{g\rho\cos^2\varphi}; \quad \rho = \frac{T_0}{g\cos\varphi}\,\frac{d\varphi}{dx};$$

T_0 étant la tension au point C où la tangente est horizontale, R le rayon de courbure, φ l'inclinaison de la tangente sur l'horizontale, l'arc s étant compté du point C.

2. Dans un fil pesant fixé par ses extrémités, la densité varie de telle manière que le

(1) V. Broch, *Mechanik*, p. 46 et la *Statique* de M. l'abbé Moigno, p. 261.

poids d'un élément du fil soit proportionnel à sa projection horizontale. Trouver la figure d'équilibre et la tension.

R. On a $\rho = \mu \cos \varphi$. L'origine étant au point le plus bas, on trouve

$$y = \frac{g\mu}{2T_0} x^2, \quad T = \sqrt{T_0^2 + g^2\mu^2x^2}.$$

Le fil forme une parabole.

3. Même problème, le poids d'un élément étant proportionnel à sa projection verticale.

R. On a $\rho = \mu \sin \varphi$. L'équation de la courbe est

$$y = \frac{e^{ax+c}}{a} + c_1,$$

c, c_1 étant des constantes ; $a = g\mu : T_0$.

4. La densité du fil a pour expression $\rho = \mu s \cot \varphi$, μ étant une constante et l'arc s compté du point où $\varphi = 0$. Quelle est la figure d'équilibre ?

R. On voit sans peine que ρ doit être constant et l'on retombe sur une chaînette.

5. On suppose que la tension T, en chaque point, soit proportionnelle à la densité ρ. Déterminer T et ρ, et trouver la figure d'équilibre (chaînette d'égale résistance).

R. On a $\rho = \mu T$; plaçant l'origine au point où $\varphi = 0$, on trouve

$$e^{g\mu y} \cos g\mu x = 1, \quad \rho = \mu T_0 \sec g\mu x.$$

La courbe se compose d'une infinité de branches dont chacune admet deux asymptotes verticales.

6. La tension en chaque point d'un fil pesant est supposée proportionnelle au rayon de courbure de la courbe formée par le fil. Trouver la loi de la densité et la figure d'équilibre.

R. La relation facile à démontrer

$$T^2 = gT_0R\rho$$

montre que T et ρ sont dans un rapport constant et ramène au problème précédent.

7. On donne les points d'attache A et B d'un fil pesant et homogène, situés à même hauteur, avec la condition que la tension en chacun des points A et B soit égale au poids total du fil. Trouver le paramètre a de la chaînette, l'inclinaison α de la tangente en A sur l'horizontale, la *flèche* f de la chaînette, la longueur l du fil.

R. Posant $AB = 2b$, les équations du n° 118 donnent

$$l = 2a \operatorname{tg} \alpha, \quad b = a \operatorname{l.} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right), \quad f = a\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right),$$

et la condition donnée fournit l'équation

$$l = a \sec \alpha ;$$

de là on tire

$$\alpha = 60^\circ, \quad a = \frac{2b}{\operatorname{l.} 3}, \quad f = \frac{2b}{\operatorname{l.} 3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right), \quad l = \frac{4b}{\sqrt{3}\operatorname{l.} 3}.$$

CHAPITRE XVIII.

APPLICATION DES PRINCIPES DE LA STATIQUE A L'ÉQUILIBRE DES MACHINES SIMPLES.

121. On appelle *machine*, au point de vue de la statique, tout appareil qui sert à tenir en équilibre une force, dite *résistance*, au moyen d'une autre force qui ne lui est pas égale et directement opposée, et qu'on appelle *puissance*. Il est nécessaire, pour produire ce résultat, qu'un tel appareil s'appuie contre certains obstacles fixes qui gênent ses mouvements.

On ramène d'ordinaire les machines à trois types élémentaires qu'on nomme *machines simples* : ce sont le *levier*, la *corde* et le *plan incliné*. Les diverses machines que l'on considère sont des transformations ou des combinaisons de ces types simples : on les nomme *machines composées*. Nous allons chercher, d'après les principes de la statique, les conditions d'équilibre des machines simples et de leurs principales combinaisons. Nous ferons abstraction, dans cette étude, de quelques propriétés physiques des corps qui influent sur les conditions de leur équilibre : telles sont, en particulier, le *frottement*, la *déformation* des corps solides que nous regardons comme absolument rigides, la *raideur* des cordes que nous supposons parfaitement flexibles, etc. Les modifications que ces diverses propriétés introduisent dans les formules n'appartiennent pas proprement à la mécanique rationnelle.

122. *Du levier.* — Le levier, dans le sens le plus général, est un solide de forme quelconque AOB, mobile autour d'un point fixe O nommé *point d'appui*, et soumis à l'action de forces P, P′, P″... en nombre quelconque, agissant dans un même plan passant par le point O.



Les conditions d'équilibre du levier sont donc celles d'un solide qui a un point fixe et sur lequel agissent des forces dirigées dans un même plan. Nous savons (**90**) que, pour l'équilibre, *il est nécessaire et suffisant que la somme algébrique des moments des forces* P *par rapport au point d'appui soit égale à zéro*. Si donc p désigne la perpendiculaire abaissée du point O sur une force quelconque P ou le *bras de levier* de P, l'équation d'équilibre du levier sera

$$\Sigma Pp = 0,$$

le produit Pp étant affecté du signe + ou du signe — suivant le sens dans lequel la force P tend à faire tourner le levier autour du point O.

Quand le centre de gravité du levier coïncide avec le point O, la fixité de ce point détruit la résultante des actions que la pesanteur exerce sur le levier, et il n'y a pas à en tenir compte. Mais le plus souvent il n'en est pas ainsi, et l'on doit, pour tenir compte de l'influence de la pesanteur sur l'équilibre du levier, joindre aux forces qui sollicitent celui-ci une force verticale égale à son poids et appliquée à son centre de gravité.

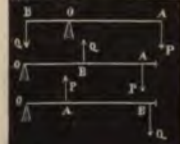
Pour calculer la pression du levier en équilibre sur le point O, ou la *charge* de ce point, il suffit de se rappeler que cette pression est égale à la résultante des forces appliquées au levier, tansportées parallèlement à elles-mêmes au point O.

123. Le cas le plus simple est celui où deux forces seulement, une résistance Q (un poids à soulever par exemple) et une puissance P, agissent sur le levier. Soient p, q les distances du point O aux directions respectives des forces P, Q. Les moments de ces forces devant être de signes contraires pour que leur somme puisse être égale à zéro, leurs valeurs seront Pp, $-Qq$, et l'équation d'équilibre sera

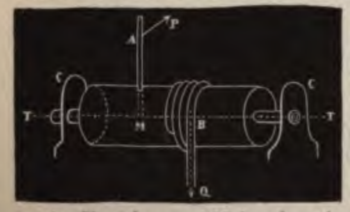
$$Pp - Qq = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{q}{p}.$$

Donc, pour l'équilibre, *il faut que la puissance et la résistance soient en raison inverse de leurs bras de levier.*

Cette règle s'applique à toute espèce de levier : si le point d'appui tombe entre les points d'application de la puissance et de la résistance, le levier est du *premier genre;* il est du deuxième, si la résistance agit entre le point O et la puissance; du troisième, si la puissance agit entre le point O et la résistance. La balance romaine est un levier du premier genre; la brouette un levier du second; la pédale du remouleur un levier du troisième.



124. *Du Treuil.* — Le *treuil* est un cylindre solide ou *arbre,* mobile autour de son axe, au moyen de deux tourillons T, T qui sont portés sur des coussinets fixes C, C et ont même axe que le cylindre, mais un diamètre beaucoup plus petit. Une barre AM implantée sur le cylindre normalement à son axe TT,



reçoit l'action de la puissance P, qui d'ordinaire agit perpendiculairement à la barre AM et à l'axe TT. La résistance Q s'exerce sur une corde enroulée autour de l'arbre du treuil auquel son extrémité est fixée.

Les conditions d'équilibre du treuil sont celles d'un solide qui peut tourner librement autour d'un axe fixe : *la somme algébrique des moments des forces* P *et* Q *par rapport à l'axe* TT *doit être égale à zéro*. La force P étant perpendiculaire à l'axe, soit $r = AM$ la distance de son point d'application A à l'axe du treuil, ou le rayon de la circonférence que décrit le point A dans la rotation autour de TT; le moment de la puissance est Pr. D'autre part, soit ρ le rayon de l'arbre : ρ est la distance entre l'axe et la force Q, et le moment de cette force est $-Q\rho$, car il faut pour l'équilibre que les forces P et Q agissent en sens contraire sur le treuil. L'action de la pesanteur se réduit sensiblement au poids de l'arbre, appliqué au centre de gravité qui est un point de l'axe fixe : son moment est donc nul. L'équation d'équilibre est donc



$$Pr - Q\rho = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\rho}{r}.$$

Ainsi, la condition de l'équilibre du treuil est *que la puissance et la résistance agissent en sens contraire l'une de l'autre, et que la première soit à la seconde comme le rayon de l'arbre est au rayon de la circonférence que décrirait le point d'application de la puissance.*

Au lieu d'agir sur une barre AM implantée normalement à la surface de l'arbre, la puissance est souvent appliquée, soit à une manivelle montée sur le prolongement de l'un des tourillons, soit à une corde enroulée sur la circonférence d'une roue fixée à l'arbre du treuil et ayant même axe que lui. La règle donnée plus haut s'applique à tous les cas.

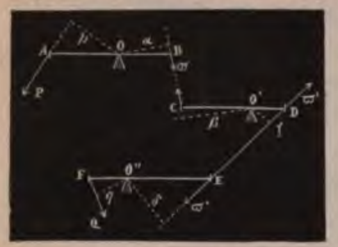
Il arrive quelquefois, comme lorsqu'on soulève à l'aide d'un treuil de lourdes pierres dans les carrières, que le diamètre de la corde BQ ait une valeur comparable à celle du diamètre de l'arbre. On doit remarquer alors que, la direction de la résistance étant celle de l'axe de la corde, la distance de cette force à l'axe de rotation TT est égale, non pas au rayon ρ de l'arbre, mais à ce rayon augmenté de celui de la corde.



La détermination de la charge des coussinets se fera sans difficulté par la méthode indiquée au n° **91**.

Dans la plupart des applications du treuil, l'arbre est horizontal. Lorsque, comme cela a lieu dans la manœuvre des vaisseaux et dans les ports de mer, l'arbre du treuil est posé verticalement, et la barre sur laquelle agit la puissance implantée horizontalement sur l'arbre, le treuil prend le nom du *Cabestan*. Les conditions d'équilibre sont exprimées par la même règle.

123. *Équilibre d'un système de leviers.* — Soit une machine composée de plusieurs leviers AB, CD, EF, ayant leurs points d'appui respectifs en O, O′, O″, et réagissant les uns sur les autres, soit par traction au moyen d'un cordon BC, soit par la pression d'une barre DE. Soient P, Q la puissance et la résistance, appliquées respectivement en A et en F, et cherchons la condition d'équilibre par la méthode des réactions.



Le levier AB est en équilibre entre la puissance P et la réaction ϖ du cordon CB; p, α étant les perpendiculaires du point O sur les directions de P et de ϖ, on a, comme on l'a vu,

$$Pp = \varpi\alpha.$$

Désignons de même par ϖ' la réaction du lien ED sur CD, par β et γ les perpendiculaires du point O′ sur les forces ϖ et ϖ'; par δ et q les perpendiculaires du point O″ sur ϖ' et Q; les conditions d'équilibre des leviers CD et EF donneront

$$\varpi\beta = \varpi'\gamma, \qquad \varpi'\delta = Qq,$$

et il suffit de multiplier membre à membre ces trois équations pour éliminer les réactions inconnues ϖ, ϖ', et obtenir l'équation d'équilibre

$$Pp\beta\delta = Qq\alpha\gamma,$$

ou encore

$$\frac{P}{Q} = \frac{q\alpha\gamma}{p\beta\delta}.$$

Il faut donc, pour l'équilibre, que *la puissance soit à la résistance comme le produit des bras de levier situés du côté de la résistance est au produit des bras de levier situés du côté de la puissance.*

Si l'on ajoute la condition que les forces qui sollicitent un même levier tendent à la faire tourner en sens contraire l'une de l'autre, on aura tout

ce qui est nécessaire pour l'équilibre. La règle est évidemment applicable à un nombre quelconque de leviers.

Les directions des réactions ϖ, ϖ', sont nécessaires à connaitre pour l'évaluation de leurs bras de levier : si ces réactions s'exercent par l'intermédiaire de cordons flexibles, les directions de ceux-ci sont celles des forces ϖ, ϖ'; si c'est par pression directe, les réactions sont normales aux surfaces en contact.

126. *Équilibre d'un système de treuils.* — Considérons plusieurs treuils T, T', T'', réagissant les uns sur les autres au moyen de cordes qui s'enroulent d'une part sur l'arbre d'un treuil, d'autre part sur la roue du suivant. Soient r, r', r'', les rayons des roues; ρ, ρ', ρ'' les rayons des arbres; P la puissance opérant sur la roue du treuil T; Q la résistance agissant sur l'arbre du dernier treuil T''; τ, τ' les tensions des cordes qui réunissent T à T', T' à T''. L'équilibre de chaque treuil, considéré isolément, fournira les trois équations

$$Pr = \tau\rho, \quad \tau r' = \tau'\rho', \quad \tau' r'' = Q\rho'',$$

et par l'élimination des inconnues τ, τ' on aura

$$Prr'r'' = Q\rho\rho'\rho'', \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\rho\rho'\rho''}{rr'r''}.$$

La condition d'équilibre du système est donc *que la puissance soit à la résistance comme le produit des rayons des arbres est au produit des rayons des roues.*

La communication d'un treuil au suivant, au lieu d'être établie au moyen de cordes comme on l'a supposé, se fait souvent d'une autre manière. On taille à la circonférence de la roue du treuil T' des dents d'une forme particulière, qui viennent s'engager dans les intervalles de dents d'une forme semblable taillées à la surface de l'arbre du treuil T, de telle façon que la rotation de l'un des treuils entraîne nécessairement celle de l'autre. On a alors des *engrenages;* les roues des treuils deviennent des *roues dentées,* les arbres sont appelés *pignons.* La condition d'équilibre est d'ailleurs toujours la même: *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues dentées.*

127. *De la Poulie.* — La deuxième machine simple, la *corde,* est employée pour vaincre une résistance, soit au moyen d'un arbre fixe autour duquel elle glisse; soit, le plus souvent, à l'aide de la *poulie.*

On nomme ainsi une roue pouvant tourner librement autour d'u axe O maintenu dans une pièce GH qu'on appelle *chape*, et creusé en gorge à sa circonférence de manière à recevoir une corde aux extré mités de laquelle agissent les forces.



Dans la poulie fixe, la chape et l'axe O son regardés comme fixes; la puissance P et la résistance Q agissent sur les deux brins de la corde; leurs direc tions sont tangentes à la circonférence de la poulie Il suit de là que les distances OA, OB de l'axe O à ces directions sont égales entr'elles et au rayon d la poulie, et l'équilibre de la roue exigeant que les moments des forces P et Q soient égaux par rapport à l'axe O, on doit avoir $P = Q$. Ainsi *dans la poulie fixe en équilibre, la puissance égale la résistance.*

Déterminons la pression R sur l'axe. Pour cela, transportons le forces P, Q parallèlement à elles-mêmes en O; soit 2α l'angle compri entre leurs directions; leur résultante R représente la pression sur l'axe Or, on a

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 2\alpha} = P\sqrt{2(1 + \cos 2\alpha)} = 2P\cos\alpha.$$

128. *Poulie mobile.* — La poulie fixe ne sert qu'à changer la directio de la force pour faciliter son application, mais elle peut en augmenter l'effet : on obtient ce dernier rés tat par l'emploi de la poulie mobile.



Une extrémité de la corde est fixée en un point l'autre est soumise à l'action de la puissance P. résistance Q agit sur l'axe O par l'intermédiaire la chape. Pour trouver la condition d'équilibre, o observe que la réaction S du point fixe D joue ici même rôle que la résistance Q dans le cas de la poul fixe, et la résistance Q remplace ici la réaction R de l'axe dans la pouli fixe.

Appliquons donc les formules du problème précédent avec les chang ments convenables ; nous aurons

$$P = S, \qquad Q = 2P\cos\alpha,$$

α étant ici la moitié de l'angle compris entre S et P, c'est-à-dire entre l

directions des deux brins de la corde. Or, si l'on mène la droite AB qui joint les points de contact de ces directions avec la circonférence de la roue, le triangle AOB donne

$$\text{AOB} = 180^0 - 2\alpha, \quad \text{AB} = 2\text{OA} \sin \frac{1}{2} \text{AOB} = 2\text{OA} \cos \alpha,$$

donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{OA}{AB}.$$

Donc *dans l'équilibre de la poulie mobile, la puissance est à la résistance comme le rayon de la poulie est à la droite qui joint les extrémités de l'arc embrassé par la corde.*

Le rapport P : Q est donc le plus petit possible lorsque AB est égal au diamètre de la poulie, ou lorsque les deux brins de la corde sont parallèles. Alors $Q = 2P$.

Plusieurs poulies peuvent se combiner entr'elles de diverses manières. Si, dans chacune des poulies, la corde a une extrémité fixe et l'autre attachée à la chape de la poulie suivante, la méthode des réactions jointe à la règle d'équilibre de la poulie mobile fournit immédiatement la condition d'équilibre du système ; mais cette disposition est peu employée. Le plus souvent on assemble plusieurs poulies dans une même chape, pour en former une *moufle* ; le système de deux moufles réunies par une même corde, qui s'enroule alternativement autour d'une poulie de l'une, plus de l'autre moufle, constitue un *palan*. La chape de la moufle supérieure est suspendue à un obstacle fixe ; celle de la moufle inférieure est mobile et reçoit directement l'action de la résistance Q, tandis que la puissance P agit à l'extrêmité libre de la corde. On voit sans peine que tous les brins de la corde ayant même tension, et la puissance P devant être égale à la tension du dernier brin, si n est le nombre des poulies, on a pour la condition d'équilibre

$$P = \frac{Q}{n}.$$

129. *Du plan incliné.* — On appelle *plan incliné* un plan résistant, fixe, contre lequel s'appuie un corps solide soumis à l'action de deux forces qui s'y font équilibre au moyen de la réaction du plan. Pour plus de simplicité, admettons d'abord que le solide se réduise à un simple point

matériel M. Soient Q la résistance, P la puissance, que nous supposons, pour fixer les idées, verticale de haut en bas, N la réaction normale du plan; α l'inclinaison du plan sur le plan horizontal, β l'angle que fait la direction de Q avec le plan. D'après ce que nous avons établi au N° 69, l'équilibre exige que la force Q soit dans le plan vertical normal au plan incliné, et que l'on ait

$$(\alpha) \qquad P : Q = \cos\beta : \sin\alpha.$$

Ensuite, nous avons trouvé

$$N = P\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

Lorsque la force Q agit parallèlement au plan incliné, l'angle β est nul, et l'on a

$$Q = P\sin\alpha, \qquad N = P\cos\alpha.$$

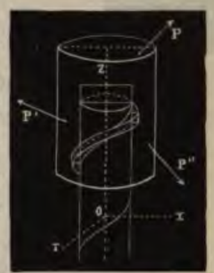
Lorsque la force Q est dirigée horizontalement, on a $\beta = -\alpha$, et par suite

$$Q = P\,\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad N = P\sec\alpha.$$

Considérons maintenant un solide quelconque S appuyé, par un de ses points M, sur le plan incliné AB, et sollicité par deux forces P, Q. En introduisant la réaction N du plan, le solide pourra être considéré comme libre. Faisons la réduction des forces au point M : la force résultante et le couple résultant devront être nuls séparément (**85**). La résultante de P, Q, N au point M devant être nulle, nous sommes d'abord ramenés aux mêmes conditions trouvées ci-dessus pour l'équilibre d'un point : la relation (α) entre P et Q devra être vérifiée, et le plan mené par M parallèlement aux forces P et Q devra être normal au plan incliné. Pour que le couple résultant des deux couples nés du transport des forces P et Q au point M soit nul, il faut 1° que ces deux couples aient leurs plans parallèles, et, par conséquent, *que les forces* P, Q *soient dans un même plan mené par le point* M *normalement au plan incliné*; 2° que leurs moments soient égaux et de signes contraires, ou, en d'autres termes, *que les forces* P *et* Q *aient, par rapport au point* M, *des moments égaux et de signes contraires.*

Tel est l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du solide S.

130. *De la vis.* — Sur la surface d'un cylindre circulaire droit, traçons la courbe nommée *hélice,* qui coupe sous un angle constant τ les génératrices du cylindre (Cours d'An., p. 230, ex. 1.) et jouit par conséquent de la propriété de se réduire à une droite lorsqu'on développe la surface sur un plan. Concevons qu'un profil plan (un rectangle ou un triangle) se meuve de façon que son plan passant toujours par l'axe du cylindre, un de ses points parcoure l'hélice : il engendre un *filet saillant* adhérent à la surface du cylindre et constituant avec celui-ci le solide nommé *la vis.* La portion h d'une génératrice du cylindre, comprise entre deux spires consécutives de l'hélice, est *le pas de vis.*



L'*écrou* complète la vis : c'est un solide de forme extérieure quelconque, mais évidé intérieurement suivant un tracé géométrique tel que l'écrou s'applique exactement sur la vis; en sorte que si, comme nous le supposerons ici, la vis est fixe et l'écrou mobile, celui-ci ne peut se mouvoir qu'en restant en contact par les mêmes points avec la vis. Chacun de ses points décrit une hélice de même pas que l'hélice primitive, et l'écrou tourne autour de l'axe de la vis en même temps qu'il glisse parallèlement à cet axe.

Cela posé, des forces P, P',... agissent sur l'écrou : il faut trouver les conditions d'équilibre de celui-ci, en négligeant les frottements. L'axe de la vis étant pris pour axe des z, le plan XY perpendiculaire, appliquons à l'équilibre de l'écrou l'équation déduite du principe des vitesses virtuelles au N° 70, savoir

$$u_x\Sigma X + u_y\Sigma Y + u_z\Sigma Z + p\Sigma(yZ - zY) + q\Sigma(zX - xZ) + r\Sigma(zY - yX) = 0,$$

u_x, u_y, u_z étant les composantes de la translation virtuelle; p, q, r celles de la rotation virtuelle; X, Y, Z les composantes d'une force quelconque P; x, y, z les coordonnées de son point d'application. Chaque point de l'écrou restant à une distance constante de l'axe OZ, tout déplacement virtuel de ce solide se compose d'une translation parallèle à OZ, et d'une rotation autour de OZ. Les composantes u_x, u_y, p, q sont nulles et l'on a

$$u_z\Sigma Z + r\Sigma(xY - yX) = 0.$$

D'autre part, soit a le rayon du cylindre : la vitesse d'un point de l'écrou sur l'hélice peut être regardée comme la résultante d'une vitesse u_z parallèle à OZ, et d'une vitesse $-ar$ autour de OZ; appli-

quant la construction de Roberval à la tangente à l'hélice, on a l'équation



$$-ar = u_2 \operatorname{tg} \tau, \quad \text{d'où} \quad \frac{u_2}{r} = -a \cot \tau.$$

L'équation d'équilibre devient donc

$$\frac{\Sigma(xY - yX)}{\Sigma Z} = a \cot \tau.$$

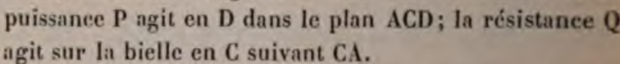
Enfin, développant la surface du cylindre sur un plan, on voit que le pas de vis h et la section du cylindre rectifiée sont deux côtés d'un triangle rectangle, l'angle adjacent à h étant égal à τ. Donc

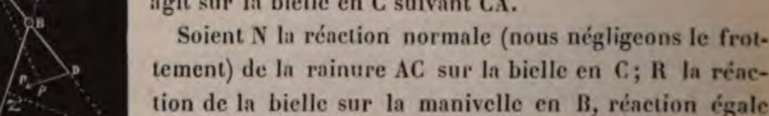
$$h = 2\pi a \cot \tau, \quad \text{d'où} \quad \frac{\Sigma(xY - yX)}{\Sigma Z} = \frac{h}{2\pi}.$$

Donc, *pour l'équilibre de l'écrou, il faut et il suffit que la somme des moments des forces qui lui sont appliquées, par rapport à l'axe de la vis, divisée par la somme des composantes de ces forces parallèlement à l'axe, soit égale au quotient de la longueur du pas de vis par le nombre* 2π.

Dans le cas ordinaire les forces se réduisent à deux : une résistance Q appliquée sur la tête de l'écrou, parallèlement à l'axe de la vis; une puissance P appliquée à un levier implanté dans l'écrou, cette force P agissant perpendiculairement à l'axe et au levier. *La puissance est à la résistance comme le pas de vis est à la circonférence que tend à décrire le point d'application de la puissance.*

131. *Equilibre du genou.* — Le *genou* se compose d'une manivelle ABD mobile autour d'un point fixe A et d'une bielle BC, articulée en B à la manivelle, l'extrémité C glissant dans une rainure AC. La puissance P agit en D dans le plan ACD; la résistance Q agit sur la bielle en C suivant CA.





Soient N la réaction normale (nous négligeons le frottement) de la rainure AC sur la bielle en C; R la réaction de la bielle sur la manivelle en B, réaction égale et contraire à la pression de AD sur BC. L'équilibre de la bielle exige (**72**) que cette pression soit égale et opposée à la résultante des forces Q, N appliquées en C; donc la réaction R est égale à la résultante de Q, N, et agit suivant le prolongement BF de CB.

L'équilibre de la manivelle exige que les moments de P, R par rapport au point A soient égaux et de signes contraires; donc

$$P \times Ap - R \times Az = 0;$$

Soit E le point où le prolongement de AD coupe la direction de la force N. Le moment de la résultante R des forces Q, N par rapport au point E est égal à la somme des moments de Q et de N par rapport au même point (**73**) : le moment de N étant nul, on a

$$R \times Ez' = Q \times EC.$$

Eliminons R entre ces deux équations; il vient

$$P \times Ap = Q \times \frac{EC}{Ez'} \times Az.$$

Mais si nous menons AF parallèle à CE, les triangles rectangles semblables Ez'C, AzF donneront

$$EC : Ez' = AF : Az, \quad \text{ou} \quad \frac{EC}{Ez'} Az = AF,$$

et la relation d'équilibre deviendra

$$P \times Ap = Q \times AF.$$

Si le rapport AD : AB est très-grand, cet appareil permet de résister à une forte pression Q au moyen d'un effort P très-faible. L'effet maximum est développé par P quand cette force est normale à AD.

132. — *Balance de Quintenz.* — Cette balance, employée dans les gares de chemins de fer pour peser les objets volumineux, est représentée en coupe par la figure. AB est le plateau qui reçoit le corps à peser; E est un couteau qui s'appuie sur un tablier CD, mobile autour du point d'appui C, suspendu d'autre part par la tringle DF au fléau FH de la balance. O est l'axe du fléau, G le point où s'attache une tringle BG qui supporte le plateau AB, appuyé d'autre part sur le couteau E; H est le point de suspension du contrepoids Q qui doit faire équilibre au poids P.

Appliquons le principe des vitesses virtuelles. Une condition est imposée à l'appareil : c'est que le plateau AB reste horizontal dans toutes les inclinaisons du fléau. Or, si le tablier CD décrit un angle infiniment petit $\partial\theta$ autour du point C, D s'abaisse d'une quantité Dd égale à CD $\times\, \partial\theta$, et le couteau E d'une quantité CE $\times\, \partial\theta$. Le point F s'abaissant d'une quantité Ff égale à Dd ou CD $\times\, \partial\theta$, il en résulte un déplacement angulaire du fléau autour du point O égal à CD $\times\, \partial\theta$: OF; donc G s'abaisse d'une quantité Gg, égale à

$(CD \times \delta\theta : OF) \times OG$, et le point B s'abaisse aussi d'une quantité égale Bb. Pour réaliser l'horizontalité constante du plateau AB, il suffit que E et B s'abaissent de quantités égales, ou que l'on ait

$$CE \times \delta\theta = \frac{CD \cdot OG}{OF} \times \delta\theta, \quad \text{ou} \quad (\alpha) \ \frac{CE}{CD} = \frac{OG}{OF}.$$

On devra placer le point de suspension G de la tringle GB de manière à vérifier cette condition, que nous supposerons remplie.

Cela admis, dans le déplacement virtuel que l'on vient de considérer, le centre de gravité du poids P, *quelle que soit la position de celui-ci sur le plateau*, s'abaissera d'une quantité égale à $CE \times \delta\theta$, et le travail virtuel de la force P sera

$$P \times CE \times \delta\theta.$$

D'autre part, le déplacement angulaire du fléau étant égal à $CD \times \delta\theta : OF$, le travail virtuel du contre poids Q est

$$Q \times Hh = Q \frac{CD \times \delta\theta}{OF} \cdot OH.$$

Égalant à zéro la somme des travaux virtuels de P et Q, on a

$$P \times CE = Q \times \frac{CD}{OF} OH, \quad \text{ou} \quad P \times OG = Q \times OH,$$

à cause de la relation (α). La condition d'équilibre est donc la même que si le poids P était directement suspendu au point G du fléau.

LIVRE TROISIÈME.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE XIX.

MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL LIBRE.

183. La *dynamique* a pour objet l'étude des lois du mouvement, comme la statique celle des lois de l'équilibre. Le problème le plus simple à considérer est celui du mouvement d'un simple point matériel, et quoiqu'il paraisse une pure abstraction sans application possible, nous verrons plus loin qu'il a une grande importance dans l'étude du mouvement des systèmes matériels. Pour simplifier, nous supposons d'abord que le point matériel soit entièrement libre et que son mouvement soit rectiligne.

Nous avons établi au chapitre IX (N° **55**) que lorsqu'un point se meut librement, la force qui le sollicite à chaque instant a pour direction celle de l'accélération du point mobile à cet instant et son intensité est mesurée par le produit de la masse du point par l'accélération. Donc, dans le cas que nous considérons, la force est dirigée suivant la droite parcourue par le point. De plus, soient m la masse, v la vitesse et x la distance du mobile à une origine O prise sur la droite OX qu'il parcourt, à l'époque t (v et x étant affectés du signe $+$ ou $-$ suivant le sens dans lequel ces

grandeurs sont dirigées (8). Soit φ l'intensité de la force qui agit sur le point mobile et détermine son mouvement. D'après le théorème rappelé plus haut, nous avons

$$\varphi = m\frac{dv}{dt}.$$

Cette force φ est la force *motrice*; mais dans les questions où il s'agit d'un point matériel unique, la masse m n'intervenant que comme un facteur constant, il est plus simple d'introduire au lieu de la force motrice, la force appelée *accélératrice*, qui mesure le rapport de la force motrice à la masse du point. Nous la désignerons ici par X, et nous aurons

$$X = \varphi : m = \frac{dv}{dt}.$$

La force accélératrice est donc mesurée par l'accélération et a même signe que cette dernière.

Le problème du mouvement rectiligne consiste dans la recherche des relations entre les variables t, x, v, X, entre lesquelles nous avons toujours deux relations générales

$$(1)\quad v = \frac{dx}{dt}, \qquad (2)\quad X = \frac{dv}{dt}.$$

Pour que l'on puisse déterminer x, v, X en fonction du temps, les conditions particulières de la question devront donc fournir une troisième équation

$$(3)\qquad F(t, x, v, X) = 0$$

qui, en général, contiendra les quatre variables.

La relation (2) se met souvent avec avantage sous d'autres formes, telles que

$$(2')\quad X = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad (2'')\quad X = v\frac{dv}{dx},$$

qui résultent de l'élimination soit de v, soit de t, entre (1) et (2).

134. Admettons que l'équation (3) soit donnée. Remplaçant v et X par leurs valeurs (1) et (2'), on lui donnera la forme

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

et x sera lié à t par une équation différentielle du second ordre. L'intégra-

tion fera connaître x en fonction de t avec deux constantes arbitraires (Cours d'An., 340), ce qui doit être : en effet, la position du point mobile au bout d'un temps quelconque ne dépend pas seulement de la force à laquelle il a été soumis pendant ce temps, mais aussi de la position qu'il occupait et de la vitesse qui l'animait au commencement de cet intervalle. Il faut donc, pour achever la détermination du mouvement du point, que l'on donne les valeurs de x et de v à une certaine époque, que nous pourrons toujours prendre pour origine du temps et désigner par $t = 0$. Soient x_0 et $v_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ ces valeurs données : nous avons expliqué dans le calcul intégral comment la connaissance de ces quantités permet de déterminer les deux constantes arbitraires de l'intégration.

125. Il est rare que le problème se présente sous cette forme générale; presque toujours, la relation (3) ne renferme que deux ou trois des variables t, x, v, X, et le problème d'analyse est simplifié. Examinons les cas principaux :

1° Si l'équation (3) est de la forme

$$F(x, t) = 0,$$

on en tire x en fonction du temps ; en différentiant, on a les deux premières dérivées de x par rapport à t, c'est-à-dire v et X : tout est donc connu par de simples différentiations.

2° Supposons la force X exprimée en fonction du temps,

$$X = f(t).$$

On a, par l'équation (2),

$$\frac{dv}{dt} = f(t), \quad v = C + \int f(t)\,dt.$$

La constante C est déterminée par la vitesse initiale v_0 : supposons l'intégrale prise à partir de $t = 0$; posant $t = 0$ dans l'expression de la vitesse, on a

$$v_0 = C, \quad v = v_0 + \int_0^t f(t)\,dt = v_0 + \varphi(t).$$

L'équation (1) donne ensuite

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \varphi(t), \quad x = C_1 + v_0 t + \int_0^t \varphi(t)\,dt.$$

Soit x_0 la valeur de x pour $t = 0$; $C_1 = x_0$, donc

$$x = x_0 + v_0 t + \int_0^t \varphi(t)\,dt.$$

On a donc x, v, X en fonction de t; le problème est résolu par de simples quadratures.

3° Si l'équation (3) est de la forme $F(x, X) = 0$, ou si l'on donne une relation entre la force et le chemin parcouru, on peut, au moyen de la relation (2'), écrire

$$F\left(x, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

et intégrer cette équation du second ordre en déterminant les constantes par les données initiales x_0, v_0 : ce procédé est quelquefois le meilleur. On peut aussi procéder comme il suit, par deux intégrations successives. Tirant de l'équation donnée X en fonction de x et appliquant la formule (2''), on obtient une équation de la forme

$$v\frac{dv}{dx} = f(x), \quad \text{ou} \quad 2v\,dv = 2f(x)\,dx, \quad v^2 = C + 2\int f(x)\,dx.$$

On détermine C en substituant, après la quadrature effectuée, à x et à v leurs valeurs initiales. On a ensuite

$$\frac{dx^2}{dt^2} = C + 2\int f(x)\,dx, \quad dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{C + 2\int f(x)\,dx}},$$

et une nouvelle quadrature fait connaître t en fonction de x, avec une constante C_1 que l'on détermine en posant $t = 0$, $x = x_0$. Quant au double signe dont la valeur de dt est affectée, il ne doit pas être négligé, puisque c'est du signe de $\frac{dx}{dt}$ que dépend le sens du mouvement : dans chaque cas particulier, il sera déterminé par les données du problème.

4° Supposons enfin une relation $F(v, X) = 0$; on en déduit l'expression de la force X en fonction de la vitesse du point. On a donc

$$X = f(v), \quad \frac{dv}{dt} = f(v), \quad dt = \frac{dv}{f(v)}, \quad t = C + \int\frac{dv}{f(v)},$$

l'intégrale étant toujours supposée prise à partir d'une valeur donnée de v. Posant $t = 0$, $v = v_0$, on détermine C. Tirant de l'équation v en fonction de t, on a

$$v = \varphi(t), \quad \frac{dx}{dt} = \varphi(t), \quad x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\,dt,$$

et cette nouvelle quadrature achève la solution du problème.

S'il arrive que l'équation en v, t soit difficilement résoluble par rapport à v, on obtiendra une autre relation comme il suit. On a

$$dt = \frac{dv}{f(v)}, \quad vdt = dx = \frac{vdv}{f(v)}, \quad x = x_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{f(v)},$$

et la quadrature étant faite, donne une relation entre x et v : si l'on sait éliminer v entre cette équation et la valeur de t ci-dessus, on a entre x et t l'équation demandée.

En résumé, dans les cas examinés, la solution du problème dépend de simples quadratures.

Remarque. — La question du mouvement rectiligne se ramenant, en général, à l'intégration d'une équation du second ordre, et l'intégrale devant renfermer deux constantes arbitraires pour que l'on puisse satisfaire aux conditions initiales du mouvement, c'est bien l'intégrale générale que l'on doit rechercher dans les questions de mécanique. Il peut arriver cependant, et Poisson en a donné un exemple, que l'équation admette une solution singulière et que celle-ci ne doive pas être négligée, le mouvement, représenté pendant une certaine période de temps par l'intégrale générale, se trouvant ensuite déterminé par la solution singulière.

126. *Applications.* — I. *Un point matériel* M *est sollicité vers un centre fixe* O *par une force proportionnelle à sa distance* x *à ce centre ; à l'époque* $t = 0$, *il est posé sans vitesse à une distance* OA $= a$ *du centre d'action. Déterminer son mouvement.*

La vitesse initiale est nulle et la force constamment dirigée vers un même point O ; le mouvement sera rectiligne sur la droite OA : prenons cette droite pour axe des x positifs. La force accélératrice X étant dirigée vers l'origine O et, par suite, de signe contraire à x, on a, μ^2 étant une constante positive,

$$X = -\mu^2 x.$$

L'équation du mouvement sera donc, d'après (2'),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2 x = 0,$$

équation linéaire à coefficients constants dont l'intégrale générale est (Cours d'An., 349)

$$x = A \cos \mu t + B \sin \mu t,$$

A, B étant des constantes à déterminer par l'état initial. On tire de là

$$v = -A\mu \sin \mu t + B \mu \cos \mu t,$$

d'où, faisant $t = 0$, $x = a$, $v = 0$,

$$A = a, \quad B = 0,$$

et par conséquent la solution du problème est donnée par les formules

$$(\alpha) \quad x = a \cos \mu t, \qquad (\beta) \quad v = -a\mu \sin \mu t.$$

La discussion de ces formules fait connaître toutes les circonstances du mouvement. Depuis l'époque $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{2\pi}{\mu}$, x est positif et décroît jusqu'à zéro, v est négatif et croît jusqu'à $-a\mu$: le point mobile atteint donc le centre d'action avec une vitesse maxima, dirigée dans le sens AO, puis il dépasse le point O. De $t = \frac{\pi}{2\mu}$ à $t = \frac{\pi}{\mu}$, x varie de zéro à $-a$, v de $-a\mu$ à zéro ; le point s'éloigne du centre du côté opposé à OA avec une vitesse décroissante, qui devient nulle quand le mobile est en A', à une distance OA' = OA. Le point se trouve alors dans des conditions semblables à celles où il était à l'origine du temps, en sorte que le mouvement recommencera en sens inverse suivant les mêmes lois, jusqu'à ce que le mobile atteigne, à l'époque $t = \frac{2\pi}{\mu}$, sa position initiale A avec une vitesse nulle ; et ainsi de suite. Le mouvement du point est donc *oscillatoire* et *périodique* : la position et la vitesse redeviennent les mêmes après des intervalles de temps égaux à $\frac{2\pi}{\mu}$, ce que les formules (α) et (β) manifestent d'ailleurs immédiatement.

L'expérience prouve que, dans les corps élastiques, une molécule écartée de sa position d'équilibre y est ramenée par une force proportionnelle à la distance qui l'en sépare. Les lois du mouvement étudié ci-dessus s'appliquent donc sensiblement aux oscillations de la molécule autour de sa position d'équilibre.

137. — II. *Un point matériel sollicité par une force constante, éprouve de la part du milieu environnant une résistance directement opposée à la vitesse qui l'anime et proportionnelle au carré de cette vitesse. Trouver le mouvement du point, sa vitesse initiale étant nulle.*

Soient O la position initiale, prise pour origine ; OX la direction de la

force constante, prise pour axe des x positifs ; g l'accélération correspondante. La résistance du milieu étant opposée à la vitesse, il suit du principe de l'indépendance des mouvements que le mobile aura un mouvement rectiligne suivant la droite OX, et la force accélératrice due à la résistance du milieu pourra se représenter par une expression de la forme $-\frac{gv^2}{k^2}$, k étant constant. La relation (3) deviendra donc, ici,

$$X = g - \frac{gv^2}{k^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2).$$

De là

$$gdt = \frac{k^2 dv}{k^2 - v^2}, \quad gt + C = \frac{k}{2}\,l.\,\frac{k+v}{k-v}.$$

Pour $t = 0$, on doit avoir $v = 0$, donc $C = 0$, donc

$$l.\,\frac{k+v}{k-v} = \frac{2gt}{k},$$

d'où l'on tire, en posant $g = k\varepsilon$,

$$v = k\frac{e^{2\varepsilon t} - 1}{e^{2\varepsilon t} + 1} = k\frac{e^{\varepsilon t} - e^{-\varepsilon t}}{e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}}.$$

Remplaçant v par sa valeur $\frac{dx}{dt}$, et intégrant de nouveau, on trouvera

$$x = C_1 + \frac{k}{\varepsilon}\,l.\,(e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}).$$

Comme $t = 0$ doit donner $x = 0$, on a $C_1 = -\frac{k}{\varepsilon}\,l.\,2$, et par suite

$$x = \frac{k}{\varepsilon}\,l.\,\frac{e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}}{2}.$$

Le problème est résolu. On peut mettre v et x sous la forme

$$v = k\frac{1 - e^{-2\varepsilon t}}{1 + e^{-2\varepsilon t}}, \quad x = \frac{k}{\varepsilon}\left[\varepsilon t + l.\left(\frac{1 - e^{-2\varepsilon t}}{2}\right)\right].$$

On voit alors, $e^{-2\varepsilon t}$ tendant vers zéro lorsque t croît indéfiniment, que la vitesse v s'approche d'une limite égale à la constante k, et que l'espace parcouru x croît indéfiniment, mais en différant de moins en moins de la valeur

$$kt - \frac{k}{\varepsilon}\,l.\,2.$$

Le mouvement tend donc à devenir uniforme; la vitesse limite k est précisément celle pour laquelle la résistance du milieu serait égale à la force motrice.

On trouve facilement les valeurs de X en fonction de t et de x, savoir

$$X = 4g\,(e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t})^{-2}, \quad X = g e^{-\frac{2\varepsilon x}{k}}.$$

138. — III. *Les données étant les mêmes qu'au problème II, on suppose seulement que la vitesse initiale, au lieu d'être nulle, soit dirigée en sens contraire de la force et égale à* $-\alpha$.

On a donc, pour $t = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = -\alpha$. Comme la résistance du milieu est toujours en sens contraire de la vitesse, elle sera ici *positive* aussi longtemps que la vitesse restera négative. Nous aurons donc d'abord

$$X = g + \frac{gv^2}{k^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{k^2}(k^2 + v^2), \quad gdt = \frac{k^2 dv}{k^2 + v^2},$$

et en intégrant, puis déterminant la constante,

$$gt + C = k \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{k}, \quad C = -k \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{k},$$

d'où

$$gt = k\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{v}{k} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{k}\right) = k \operatorname{arc\,tg} \frac{k(v + \alpha)}{k^2 - \alpha v}.$$

Nous tirons de là, en résolvant par rapport à v et introduisant de nouveau la constante ε,

$$v = k\,\frac{k \operatorname{tg} \varepsilon t - \alpha}{k + \alpha \operatorname{tg} \varepsilon t}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = k\,\frac{k \sin \varepsilon t - \alpha \cos \varepsilon t}{k \cos \varepsilon t + \alpha \sin \varepsilon t}.$$

Multiplions par dt et intégrons :

$$x = C_1 - \frac{k}{\varepsilon}\,\mathrm{l.}\,(k \cos \varepsilon t + \alpha \sin \varepsilon t),$$

et à cause de $x_0 = 0$, $C_1 = \frac{k}{\varepsilon}\,\mathrm{l.}\,k$,

$$x = \frac{k}{\varepsilon}\,\mathrm{l.}\,\frac{k}{k \cos \varepsilon t + \alpha \sin \varepsilon t}.$$

Observons que ces formules ne s'étendent pas à une durée indéfinie, mais seulement jusqu'à l'époque t_1 où la vitesse devient nulle, époque assignée par l'équation

$$k \operatorname{tg} \varepsilon t_1 - \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \varepsilon t_1 = \frac{\alpha}{k},$$

dans laquelle on prendra pour t_1 la plus petite racine. A cet instant, la position du mobile est donnée par la formule

$$x_1 = \frac{k}{\varepsilon} \, l. \frac{k}{k \cos \varepsilon t_1 + \alpha \sin \varepsilon t_1} = \frac{k}{\varepsilon} \, l. \frac{k}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}}.$$

A partir de cette époque t_1, la vitesse étant nulle et la force accélératrice g dirigée dans le sens des x positifs, le mobile se trouve exactement dans les conditions du problème II, et son mouvement sera déterminé par les lois que nous avons trouvées dans ce cas. Si l'on cherche l'époque t' à laquelle le mobile repassera par sa position initiale O et la vitesse qu'il aura, on trouve

$$t' = t_1 + \frac{1}{\varepsilon} \, l. \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + k^2}}{k}, \quad v = \frac{k\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}.$$

Exercices.

1. Un point abandonné sans vitesse à l'action de la pesanteur, et un autre point pesant lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse α, partent simultanément de deux points donnés A et B sur une même verticale. Déterminer l'époque de leur rencontre et le point où elle a lieu.

R. Soient a la distance AB, x la distance AC ; on a

$$t = \frac{a}{\alpha}, \quad x = \frac{ga^2}{2\alpha^2}.$$

2. Le mouvement rectiligne d'un point matériel est produit par le poids d'une sphère homogène, mais volatile, dont l'évaporation à chaque instant est proportionnelle à la surface de la sphère. Quel est le mouvement de ce point ?

R. On voit sans peine que, r étant le rayon de la sphère, $dr : dt$ sera constant ; si r_0 est la valeur de r pour $t = 0$, on a donc $r = r_0 - at$, a étant une constante donnée, et en désignant par μ une autre constante, on trouvera

$$v = \frac{\mu}{4a}[r_0^4 - (r_0 - at)^4], \quad x = \frac{\mu}{20a^2}[(r_0 - at)^5 - r_0^5 + 5ar_0^4 t],$$

x et v étant supposés nuls avec t.

3. Un point matériel est attiré vers un centre fixe O par une force en raison inverse du cube de sa distance à ce centre : sa distance initiale OA $= a$, sa vitesse initiale est nulle. Déterminer son mouvement et le temps T qu'il met à arriver en O.

R. On a

$$X = -\frac{k^2}{x^3}, \quad v^2 = k^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right), \quad x = \sqrt{a^2 - \frac{k^2 t^2}{a^2}}, \quad T = \frac{a^2}{k}.$$

4. Quelle vitesse v_0 faut-il imprimer à un point matériel, de la surface de la lune vers le centre de la terre, pour qu'il atteigne sans vitesse le point où les attractions des deux astres se font équilibre? — On suppose 1° que l'attraction a lieu suivant la loi de Newton, et que chacun des deux astres agit comme si sa masse était réunie à son centre; 2° que la masse de la lune soit $\frac{1}{81}$ de celle de la terre, son rayon les $\frac{3}{11}$ du rayon terrestre, dont la valeur en mètres est 20,000,000 : π; enfin, que la distance des centres des deux astres soit 60 fois le rayon terrestre, et l'attraction à la surface de la terre égale à 9,809.

R. $$v_0 = 2275^{m}.$$

5. Un point matériel se meut dans une sphère gazeuse dont la densité décroît uniformément du centre à la surface. L'attraction d'un élément gazeux sur le point mobile est proportionnelle à la masse et en raison inverse du carré de la distance, mais la résistance du milieu est proportionnelle à sa densité et au carré de la vitesse du point. La vitesse initiale est nulle. Quelle est l'expression de la vitesse du point en fonction de sa distance x au centre O de la sphère? — On suppose connue cette loi : l'attraction d'une couche sphérique homogène et infiniment mince est nulle sur un point intérieur, et sur un point extérieur elle est la même que si toute la masse de la couche était réunie à son centre.

R. Soient ρ_0 la densité au centre O, ρ la densité à une distance x de ce point, a une constante. On a

$$\rho = \rho_0 - ax.$$

Soient ensuite μ, μ' des coefficients constants; on trouve pour la force motrice et la résistance du milieu les expressions

$$-\mu x\left(\frac{4}{3}\pi\rho_0 - ax\right), \quad \mu'(\rho_0 - ax)\,v^2,$$

et l'on a enfin

$$v^2 = 2\pi\mu e^{\mu'(2\rho_0 - ax)x}\int_{x_0}^{x} e^{-\mu'(2\rho_0 - ax)x}\left(ax - \frac{4}{3}\rho_0\right)x\,dx,$$

x_0 étant la distance initiale du mobile au point O.

6. Un point matériel est attiré vers un centre O par une force proportionnelle à sa distance x à ce centre; la résistance du milieu est proportionnelle à la simple vitesse. La vitesse initiale est nulle, la distance initiale OA $= a$; trouver le mouvement du point et discuter les formules.

R. La droite OA étant prise pour axe des x positifs, soient k, k' des constantes positives. On aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k'\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Intégrant, on distinguera deux cas : 1° $k'^2 - 4k = \alpha^2 > 0$; posant

$$r_1 = \frac{-k' + \alpha}{2}, \quad r_2 = -\frac{k' + \alpha}{2},$$

et déterminant les constantes de l'intégrale par les conditions $t=0$, $x=a$, $v=0$, on obtiendra

$$x=\frac{a}{\alpha}e^{-\frac{k'}{2}t}\left[r_1e^{-\frac{\alpha t}{2}}-r_2e^{\frac{\alpha t}{2}}\right],\quad v=\frac{ar_1r_2}{\alpha}e^{-\frac{k'}{2}t}\left[e^{-\frac{\alpha t}{2}}-e^{\frac{\alpha t}{2}}\right].$$

Le point se rapproche indéfiniment du centre d'action sans jamais l'atteindre.

2° $k'^2-4k=-\alpha^2<0$. Opérant comme ci-dessus, on a

$$x=ae^{-\frac{k't}{2}}\left(\cos\frac{\alpha t}{2}+\frac{k'}{\alpha}\sin\frac{\alpha t}{2}\right),\quad v=-\frac{\alpha^2+k'^2}{2\alpha}ae^{-\frac{k't}{2}}\sin\alpha t.$$

Le mouvement est oscillatoire de part et d'autre du centre O, mais l'amplitude des oscillations décroît constamment et a pour limite zéro. La durée d'une demi-oscillation (de $v=0$ à $v=0$) est $\frac{2\pi}{\alpha}$: elle est constante Aux époques $t=0$, $\frac{2\pi}{\alpha}$, $\frac{4\pi}{\alpha}$, ... correspondent les distances $x=a$, $x=ae^{-\frac{k'\pi}{\alpha}}$, $x=ae^{-\frac{2k'\pi}{\alpha}}$,... . Les valeurs de t qui répondent au passage du point mobile par le centre O sont les racines de l'équation

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha t}{2}=-\frac{\alpha}{k'}\cdot$$

3. **Mouvement rectiligne d'un point pesant dans un milieu résistant, la résistance étant proportionnelle à une expression de la forme $Av+Bv^2$.**

R. **1^r *Cas*** : Vitesse initiale nulle. Posant

$$Bv^2+Av-g=B(v-\alpha)(v+\beta),\quad \alpha \text{ et } \beta>0,\quad B(\alpha+\beta)=\gamma,$$

on trouve

$$v=\alpha\left(1-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+Be^{\gamma t}}\right),\quad x=\alpha t+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\,\mathrm{l.}\,\frac{\beta+\alpha e^{-\gamma t}}{\alpha+\beta},$$

ou, éliminant B et β,

$$v=\alpha\left(1-\frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma-g+ge^{\gamma t}}\right),\quad x=\alpha\left[t+\frac{\alpha}{\alpha\gamma-g}\,\mathrm{l.}\,\frac{g+(\alpha\gamma-g)e^{-\gamma t}}{\alpha\gamma}\right].$$

2e *Cas* : Vitesse initiale verticale de bas en haut v_0 ; l'axe des x positifs vers le haut.

$$1)\qquad g-\frac{A^2}{4B}=B\varepsilon^2>0,\quad v'=v+\frac{A}{2B}\cdot$$

$$v=\varepsilon\frac{v_0'-\varepsilon\operatorname{tg}B\varepsilon t}{v_0'\operatorname{tg}B\varepsilon t+\varepsilon}-\frac{A}{2B},\quad x=\frac{1}{B}\,\mathrm{l.}\left(\frac{v_0'}{\varepsilon}\sin B\varepsilon t+\cos B\varepsilon t\right)-\frac{At}{2B}\cdot$$

Durée t' de la montée et hauteur atteinte x' :

$$t'=\frac{1}{B\varepsilon}\operatorname{arc\,tg}\frac{2B\varepsilon v_0}{2g+Av_0},\quad x'=\frac{1}{2B}\,\mathrm{l.}\,\frac{g+Av_0+Bv_0^2}{g}-\frac{A}{2B^2\varepsilon}\operatorname{arc\,tg}\frac{2B\varepsilon v_0}{2g+Av_0}\cdot$$

$$2)\qquad g-\frac{A^2}{4B}=0;\quad \text{posant}\quad A=\frac{2g}{a},\quad B=\frac{g}{a^2},\quad \lambda=\frac{(v_0+a)g}{a^2},$$

on trouve

$$v=\frac{v_0+a}{1+\lambda t}-a,\quad x=\frac{a^2}{g}\,\text{l.}\,(1+\lambda t)-at,\quad t'=\frac{v_0}{a\lambda},$$

$$x'=\frac{a^2}{g}\,\text{l.}\left(1+\frac{v_0}{a}\right)-\frac{v_0}{\lambda}.$$

$$3)\qquad g-\frac{A^2}{4B}=-B\varepsilon^2<0;\quad \text{posant}\quad \frac{v'_0+\varepsilon}{v'_0-\varepsilon}=k,$$

on a

$$v=\varepsilon\frac{ke^{2B\varepsilon t}+1}{ke^{2B\varepsilon t}-1}-\frac{A}{2B},\quad x=\frac{1}{B}\,\text{l.}\,\frac{ke^{B\varepsilon t}-e^{-B\varepsilon t}}{k-1}-\frac{At}{2B},$$

$$t'=\frac{1}{2B\varepsilon}\,\text{l.}\,\frac{A+2B\varepsilon}{k(A-2B\varepsilon)},\quad x'=\frac{1}{B}\,\text{l.}\left(\frac{2\varepsilon}{k-1}\sqrt{\frac{Bk}{g}}\right)-\frac{A}{4B^2\varepsilon}\,\text{l.}\,\frac{(A+2B\varepsilon)^2}{4Bgk}.$$

CHAPITRE XX.

MOUVEMENT CURVILIGNE D'UN POINT LIBRE. THÉORÈMES DES AIRES ET DE LA FORCE VIVE.

139. D'après ce que nous avons établi au nº **55**, si l'on désigne par m la masse, par x, y, z les coordonnées d'un point mobile libre, et par X, Y, Z les composantes de la force P qui le sollicite à un instant quelconque, on a entre ces quantités les relations

$$(1)\qquad X=m\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y=m\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z=m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Telles sont les équations du mouvement curviligne d'un point libre. Si le mouvement est donné, x, y, z sont des fonctions connues du temps; de simples différentiations feront connaître v_x, v_y, v_z, et par suite la vitesse en grandeur et en direction pour un instant quelconque. Différentiant de nouveau pour trouver les dérivées secondes de x, y, z et faisant usage des équations (1), on déterminera X, Y, Z, et l'on aura la force motrice en grandeur et en direction. Le problème est donc fort simple.

Mais, en général, la force motrice est donnée en fonction du temps, de la vitesse et de la position du mobile, et il s'agit de déterminer le

mouvement du point. Supposons donc que X, Y, Z soient des fonctions connues de t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, et substituons leurs valeurs dans les équations (1), qui prendront la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= f\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f_1(t, x, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= f_2(t, x, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ). \end{aligned}\right.$$

Le problème est ramené à l'intégration d'un système de trois équations différentielles simultanées du second ordre, entre x, y, z et la variable indépendante t. On sait (Cours d'An., 364) que les intégrales de ce système renferment *six* constantes arbitraires, en sorte que

$$x = \varphi(t, C_1, C_2, C_3, C', C'', C'''),\quad y = \varphi_1(t, C_1, \ldots),\quad z = \varphi_2(t, C_1 \ldots);$$

et l'on sait déterminer ces constantes connaissant les valeurs de x, y, z et de leurs premières dérivées pour une valeur donnée t_0 de la variable t. Admettons, en effet, que l'on connaisse pour un instant déterminé, choisi d'ordinaire comme origine du temps ($t = 0$), la position et la vitesse du point, ou ses coordonnées x_0, y_0, z_0 et les composantes $(v_x)_0$, $(v_y)_0$, $(v_z)_0$: ce sont les *données initiales*. Si dans les intégrales ci-dessus on pose $t = 0$, et que l'on fasse en conséquence $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, on aura trois équations entre les six constantes seulement. Différentiant ces mêmes intégrales par rapport à t, on en déduit v_x, v_y, v_z, et en posant encore $t = 0$, remplaçant $v_x, \ldots$ par leurs valeurs initiales, on aura trois nouvelles égalités entre les mêmes constantes. Ces six équations suffiront pour déterminer les six constantes C_1, $C_2, \ldots$ et achever la solution du problème. L'élimination de t entre les équations qui expriment x, y, z en fonction du temps conduira aux équations de la trajectoire (**10**).

Souvent des considérations particulières montrent que le mouvement doit se faire dans un plan. On choisit ce plan pour plan XY ; on a $z = 0$, les équations différentielles se réduisent à deux entre x, y, t, et le nombre des constantes à quatre ; les calculs sont ainsi simplifiés.

140. Dans certains cas il est avantageux d'introduire, au lieu des composantes de la force P parallèlement à trois axes rectangulaires, ses composantes suivant la tangente MT et la normale principale MN à la trajectoire du mobile. La force P étant représentée, en grandeur et en

direction, par l'accélération du point multipliée par sa masse (**55**), et les composantes tangentielle et normale de l'accélération étant, comme on l'a vu au N° **37**,

$$j_t = \frac{dv}{dt}, \qquad j_n = \frac{v^2}{R},$$

les composantes cherchées ont pour expression

$$(3) \qquad P\cos(P, v) = m\frac{dv}{dt}, \qquad P\cos(P, N) = \frac{mv^2}{R}.$$

Dans tous les cas que nous offre la nature, la force P qui fait mouvoir un point M émane d'un autre point ou corps M', et, en vertu de la loi connue (**57**), le point M réagit sur M' en exerçant une réaction égale et directement opposée à la force P. Cette réaction, que l'on nomme souvent *force d'inertie*, a donc pour composantes parallèles aux axes OX, OY, OZ,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad -m\frac{d^2z}{dt^2},$$

et pour composantes parallèles à MT, MN,

$$m\frac{dv}{dt}, \qquad m\frac{v^2}{R},$$

ces dernières composantes étant d'ailleurs dirigées en sens contraire de celles de la force P. C'est à cette composante $mv^2 : R$ de la réaction que l'on donne ordinairement le nom de *force centrifuge*, et par une erreur qui peut entraîner des conséquences graves, on raisonne parfois comme si elle était appliquée au point mobile M lui-même et influait sur son mouvement, tandis qu'en réalité elle émane de ce point et s'exerce exclusivement sur le corps M' à l'action duquel on attribue le mouvement de M. Ce qui fait illusion à cet égard, c'est que dans les cas où l'on a l'occasion de considérer cette force centrifuge, comme quand le mobile M est retenu sur un cercle par un fil attaché en un point fixe O, les points matériels qui agissent immédiatement sur le mobile M sont en contact avec lui, et le point d'application de la réaction centrifuge est presque confondu avec celui de la force motrice. Ainsi, dans l'exemple cité, la force qui détermine le mouvement du point est la tension du fil, dirigée suivant MO; la réaction du point M est appliquée à l'extrémité du fil et agit pour le détacher du point O ou pour le rompre : c'est là la force

centrifuge. Il semble donc alors qu'une force appliquée au point M tire le fil suivant sa longueur dans le sens OM, et par suite de cette illusion on transporte au mobile M une force qui n'a de réalité que sur le fil même.

141. *Théorème des aires.* — Au lieu d'appliquer directement à chaque cas particulier les équations différentielles (1), il y a grand avantage dans bien des cas à employer les intégrales premières que fournissent certains théorèmes généraux, conséquences des équations (1), et qui constituent par eux-mêmes des propriétés remarquables du mouvement d'un point. Ce sont ces théorèmes que nous allons d'abord établir.

Multipliant les deux premières équations (1) respectivement par y, x, et retranchant, on a

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = x\,\mathrm{Y} - y\,\mathrm{X}.$$

Le premier membre est la dérivée par rapport à t de $x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}$; donc, en intégrant, on a

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{const.} + \int (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,dt.$$

On nomme *quantité de mouvement* d'un point M à un instant donné le produit mv de sa masse par sa vitesse à cet instant ; on la représente par une droite MV proportionnelle à mv et coïncidant en direction avec la vitesse. Ses composantes parallèles aux axes sont donc mv_x, mv_y, mv_z, en sorte que l'expression

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = x\cdot mv_y - y\cdot mv_x$$

représente le moment de la quantité de mouvement du point M par rapport à l'axe des z (**71**).

Si le moment de la force motrice P par rapport à l'axe OZ est nul à chaque instant, ce qui a lieu lorsque la direction de P rencontre constamment OZ ou lui est parallèle, $x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}$ est nul et l'intégrale $\int (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,dt$ s'évanouit. Le second membre de l'équation ci-dessus se réduit donc à une constante, et l'on a ce théorème :

Lorsque la direction de la force appliquée à un point mobile rencontre constamment une droite fixe, le moment de la quantité de mouvement du point par rapport à cette droite a une valeur constante.

L'équation

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C = x_0(v_y)_0 - y_0(v_x)_0$$

constitue alors une intégrale première des équations différentielles du mouvement du point, et il est naturel de l'employer au lieu de ces équations mêmes.

142. Cette intégrale est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable. Soient M_1 la projection du point M sur le plan XY; ρ, θ les coordonnées polaires de M_1, de sorte que



$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta, \qquad \operatorname{tg} \theta = y : x.$$

Cette dernière équation différentiée donne

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{\rho^2 \cos^2\theta},$$

d'où

$$\rho^2 d\theta = xdy - ydx.$$

Or, nous savons (COURS D'AN., 142) que $\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ est la différentielle de l'aire S décrite dans le plan XY par le rayon vecteur ρ du point M_1, en sorte que

$$\rho^2 d\theta = 2\, dS.$$

Seulement, pour que cette égalité subsiste toujours en valeur et en signe, il faut convenir que dS sera toujours de même signe que $d\theta$, c'est-à-dire regarder comme positives les aires décrites d'un mouvement *direct*, de OX vers OY, et comme négatives les aires décrites d'un mouvement *rétrograde*, de OY vers OX. Cette règle admise, nous aurons

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 2\frac{dS}{dt},$$

et l'intégrale trouvée plus haut pourra s'écrire

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}, \qquad \text{ou} \qquad dS = \frac{C}{2}dt.$$

Intégrant de nouveau, et supposant pour plus de simplicité que l'aire S soit comptée à partir de la position initiale du rayon vecteur ρ, en sorte que S et t s'annulent ensemble, on trouvera

$$S = \frac{C}{2}t.$$

Donc, *quand la direction de la force motrice rencontre constamment un axe fixe ou lui est parallèle, le rayon vecteur mené d'un point* O *de cet axe au point mobile, projeté sur un plan normal à l'axe, décrit dans ce plan des aires proportionnelles aux temps.*

Supposons maintenant que la direction de la force P qui agit sur un point M passe constamment par un point fixe O, et prenons O pour origine des coordonnées. Le théorème précédent s'appliquant ici à chacun des axes OX, OY, OZ, nous aurons les trois intégrales

$$(4)\quad \begin{cases} y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = \mathrm{A}, \\ z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = \mathrm{B}, \\ x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = \mathrm{C}, \end{cases}$$

A, B, C étant des constantes qui se déterminent immédiatement par les données initiales. Multiplions par x, y, z, respectivement ces équations et ajoutons-les; il viendra

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0,$$

équation qui représente un plan fixe passant par l'origine des coordonnées. Le point (x, y, z) restant dans ce plan, la trajectoire est plane.

Il est permis de prendre ce plan de la trajectoire pour plan XY; le point M coïncide alors avec sa projection M_1 sur ce plan, le rayon ρ n'est autre que le rayon vecteur OM du point mobile lui-même. L'application du théorème trouvé plus haut conduira donc à cette propriété du mouvement produit par une force centrale :

Quand la force qui sollicite un point matériel libre passe constamment par un centre fixe, la trajectoire est une courbe plane dont le plan passe par ce centre, et le rayon vecteur mené du centre au point mobile décrit, dans ce plan, des aires proportionnelles aux temps.

Cette propriété constitue le *théorème des aires*. Réciproquement, si le rayon vecteur mené d'un point fixe O à un point libre M décrit une aire plane qui varie proportionnellement au temps, la même propriété appartiendra aux aires décrites par les projections du rayon vecteur OM sur trois plans rectangulaires passant par O. Les dérivées de ces aires par rapport au temps seront constantes, et par conséquent, en vertu de

la relation établie plus haut, les équations (4) auront lieu. On en déduira en différentiant

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \text{ou} \quad yZ - zY = 0,$$

et deux autres équations semblables ; d'où

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

ce qui montre que la direction de la force se confond avec celle du rayon vecteur, et passe conséquemment par le point O.

143. *Théorème de la force vive.* — Reprenons l'expression de la composante tangentielle de la force motrice

$$P\cos(P, v) = m\frac{dv}{dt}.$$

Multipliant par vdt les deux membres de cette équation et observant que $vdt = ds$, on aura

$$mvdv = Pds\cos(P,v), \quad \text{ou} \quad (5)\ d.\frac{mv^2}{2} = Pds\cos(P,v).$$

Intégrons entre deux valeurs t_0 et t du temps, et désignons par v_0 la valeur de v pour $t = t_0$; il viendra

$$(6) \qquad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t} Pds\cos(P,v).$$

Cette équation exprime le *théorème de la force vive*. Pour l'énoncer, disons 1° que la *force vive* d'un point matériel en mouvement, à un instant donné, est le produit de sa masse par le carré de sa vitesse à cet instant ; 2° que le *travail élémentaire* d'une force appliquée à un point mobile est le produit de cette force projetée sur la direction de la vitesse, par l'élément ds de la trajectoire que le mobile décrit à l'instant considéré ; ce travail élémentaire $Pds\cos(P,v)$ est *positif* ou *négatif* selon que la direction de la force fait un angle aigu ou obtus avec celle de la vitesse ; 3° enfin, que le *travail total* de la force P pendant un intervalle de temps donné, $t - t_0$, est l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} Pds\cos(P, v),$$

ou la somme des travaux élémentaires de force P pendant cet intervalle

de temps. En vertu de ces définitions, les équations (5) et (6) fournissent les théorèmes suivants :

L'accroissement de la demi-force vive d'un point libre, pendant un temps infiniment petit, est égal au travail élémentaire de la force motrice.

L'accroissement de la demi force vive d'un point libre pendant un temps fini quelconque est égal au travail total de la force motrice pendant ce même temps.

141. Si l'on compare l'expression du travail élémentaire d'une force avec celle de son travail virtuel, donnée dans la statique, on voit immédiatement qu'elle n'en diffère que parce que la vitesse virtuelle δs du point d'application y est remplacée par l'arc élémentaire ds correspondant à un déplacement réellement effectué. On démontrera donc sans difficulté, par les mêmes raisons que dans le cas du travail virtuel (**63**), 1° que le travail élémentaire d'une force P dont les composantes sont X, Y, Z, s'exprime par la formule

$$P ds \cos(P, v) = X dx + Y dy + Z dz \,;$$

2° *Que le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires de ces forces;* et que la même relation a lieu pour le travail total effectué pendant un temps quelconque.

De là résultent ces conséquences importantes : 1° Le théorème de la force vive peut s'énoncer ainsi : *Lorsqu'un point matériel libre se meut sous l'action de plusieurs forces, la variation de la demi-force vive du mobile pendant un intervalle de temps fini ou infiniment petit égale la somme de travaux des forces appliquées au point pendant le même intervalle de temps.*

Ce théorème est compris dans les formules

$$(7) \qquad d.\frac{mv^2}{2} = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz),$$

$$(8) \qquad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma \int_{t_0}^{t} (X dx + Y dy + Z dz),$$

X, Y, Z étant les composantes rectangulaires de l'une quelconque des forces appliquées au point mobile, et Σ une somme qui s'étend à toutes les forces.

2° Admettons que, parmi les forces qui sollicitent le mobile, il y en ait

une, P_1, qui soit constamment normale à la trajectoire de ce point. On aura $\cos(P_1, v) = 0$; donc, le travail élémentaire et le travail total de cette force P_1 seront nuls à toute époque. Les termes correspondants à la force P_1 dans les équations (7) et (8) disparaîtront donc, et ces équations auront lieu absolument comme si cette force n'existait pas; c'est-à-dire que la variation de la demi-force vive du mobile sera égale à la somme des travaux de toutes les autres forces qui agissent sur le point.

Cela s'applique notamment au cas où le point M est obligé à parcourir une surface ou une courbe qui n'exerce d'ailleurs aucun frottement; car, dans ce cas, on peut regarder le point comme libre en joignant aux forces motrices qui le sollicitent la réaction de la surface ou de la courbe sur laquelle il se meut. Cette réaction étant normale à la surface ou à la courbe (puisqu'on suppose qu'il n'y ait pas de frottement) est par cela même constamment normale à la trajectoire du point; son travail est donc nul, et l'équation de la force vive a lieu pour les autres forces comme si le point était libre. Donc *lorsqu'un point matériel soumis à l'action de forces données, est assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe sans frottement, la variation de la demi-force vive du point pendant un temps quelconque est encore égale à la somme des travaux des forces motrices pendant le même temps, comme si le point était libre.*

145. Après avoir établi le théorème de la force vive dans le mouvement d'un point matériel, il est bon de justifier en quelques mots les dénominations adoptées. L'expression de *force vive* a été introduite par Leibnitz dans une discussion sur la mesure des forces en mouvement, discussion sans intérêt aujourd'hui[1]. Le mot seul est resté, et n'est pas très-heureux. Quant au terme de *travail*, il doit son origine à la manière dont on apprécie, dans l'industrie, l'effet développé par les forces. Dans ce genre de questions, une force est ordinairement employée à vaincre une résistance et à déplacer son point d'application dans le sens opposé à celui où cette résistance agit; la valeur marchande du travail accompli dépend à la fois de l'intensité de la résistance vaincue et du chemin que la force motrice a fait parcourir à son point d'application. Par exemple, si une force est employée à élever une masse de charbon d'un poids P, il est clair qu'il y aura la même dépense faite, le même travail produit, si l'on élève ce poids à une hauteur $2h$, ou si l'on élève le poids $2P$ à une

---

[1] V. Dühring, *Kritische Geschichte der allg. Principien der Mechanik*, p. 227.

hauteur h. Dans ce cas très-simple d'une force constante transportant son point d'application dans la direction même où elle agit, le travail industriel effectué serait donc mesuré par le produit Ph de la force motrice et du chemin parcouru. Or, dans ce cas, l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} Pds \cos(P, v) = P\int_{t_0}^{t} ds = Ph$$

représente précisément la même quantité.

Si la force P agit obliquement sur l'objet qu'elle déplace, par rapport à la droite qu'il parcourt, comme lorsqu'on traîne un waggon sur une voie ferrée à l'aide d'une force agissant obliquement à la voie, la composante de la force normale à la droite est évidemment perdue, et la force P n'agit utilement que par sa composante $P\cos(P, v)$ suivant la direction du mouvement. Le travail utile et payable est donc alors représenté par

$$P\cos(P, v)\int_{t_0}^{t} ds,$$

ce qui s'accorde avec notre expression générale. Enfin si la force varie et que le mobile décrive une trajectoire quelconque, on pourra, pendant chaque intervalle de temps très-court dt, regarder P comme constant et le mouvement comme rectiligne, et appliquer les considérations précédentes; on sera évidemment encore conduit à prendre pour mesure du travail utile élémentaire $Pds\cos(P, v)$, c'est-à-dire l'expression même que nous avons adoptée en général.

Telle est la suite d'idées qui justifie la dénomination de *travail* appliquée à cette expression, mais c'est dans le Cours d'application aux machines que l'importance de la notion du travail sera bien comprise.

146. Il existe un cas où le théorème de la force vive prend une forme très-remarquable : c'est celui où, la force motrice P ne dépendant que de la position du point mobile, ses composantes X, Y, Z s'expriment par les dérivées partielles, en x, y, z respectivement, d'une même fonction de ces variables, qui ne renferme pas le temps explicitement. Soit $m\varphi(x, y, z)$ cette fonction, dite *fonction des forces*. Nous avons donc

$$X = m\frac{d\varphi}{dx}, \quad Y = m\frac{d\varphi}{dy}, \quad Z = m\frac{d\varphi}{dz};$$

d'où

$$Pds\cos(P, v) = Xdx + Ydy + Zdz = md.\,\varphi(x, y, z);$$

l'équation (5) devient, par suppression du facteur m,

$$d.\,v^2 = 2\,d.\,\varphi(x, y, z),$$

et après intégration

$$(9) \qquad v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C.$$

La constante C se détermine immédiatement en posant $t = 0$ dans l'équation et remplaçant v, x, y, z par leurs valeurs initiales v_0, x_0, y_0, z_0 qui sont données. On a donc

$$v_0^2 = 2\varphi(x_0, y_0, z_0) + C,$$

et l'équation (9) peut s'écrire

$$v^2 - v_0^2 = 2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0);$$

mais nous la conserverons de préférence sous la forme (9), supposant d'ailleurs la constante C déterminée comme il vient d'être dit.

Cette équation (9) se nomme l'*intégrale de la force vive*. Elle offre ceci de remarquable, qu'elle détermine immédiatement la vitesse du point mobile par la position qu'il occupe à l'instant considéré, de telle sorte que si le point repasse plusieurs fois par la même position, il y repassera chaque fois avec la même vitesse.

Considérons les surfaces, en nombre infini, représentées par l'équation

$$\varphi(x, y, z) = \alpha,$$

α désignant un paramètre arbitraire : ce sont les *surfaces de niveau*. La fonction φ a donc une valeur constante en tous les points d'une même surface de niveau, mais cette valeur varie d'une surface à l'autre. Par chaque point de l'espace il en passe généralement une, mais une seule, du moins si la fonction $\varphi(x, y, z)$ a une valeur unique et déterminée pour un système donné de valeurs de x, y, z. Car, si deux surfaces de niveau pouvaient se couper en un point de l'espace, et si α_1, α_2 désignaient les valeurs correspondantes du paramètre α, il faudrait qu'en ce point la fonction φ admît les deux valeurs α_1, α_2, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, l'équation (9) fait voir que, si la constante C a une valeur donnée, c'est-à-dire si le point mobile part d'une surface de niveau déterminée avec une vitesse déterminée, il aura toujours acquis une même vitesse v lorsqu'il traversera une même surface de niveau $\varphi = \alpha$, quels que soient le chemin suivi pour y arriver et le point où il la traverse.

D'après les valeurs de X, Y, Z dans le cas actuel, les cosinus directeurs de la force motrice P sont respectivement proportionnels aux dérivées

partielles de φ, et par conséquent aux cosinus directeurs de la normale à la surface

$$\varphi(x, y, z) = \alpha.$$

De là cette autre propriété des surfaces de niveau : *la force qui agit sur le point mobile en un point quelconque de l'espace, est normale à la surface de niveau qui passe par ce point.* De telle sorte que, si cette surface était fixe et que le point M ne pût la quitter, il y resterait en équilibre sous l'action de la force P.

147. L'intégrale (9) subsiste alors même que le point mobile est assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe fixe, pourvu qu'il n'y ait pas de frottement. Nous avons vu, en effet, que le théorème de la force vive subsiste dans ce cas comme si la condition n'existait pas (**144**); l'équation (5) a donc lieu, et si la force P satisfait à la condition

$$Xdx + Ydy + Zdz = md.\varphi(x, y, z),$$

il est clair que l'égalité (9) subsistera également. Cette observation nous sera fort utile.

Remarquons encore que si plusieurs forces P, P_1.. agissent simultanément sur un point matériel, et si chacune d'elles admet une fonction des forces, de sorte que les composantes rectangulaires de P, P_1.. soient respectivement les dérivées partielles en x, y, z des fonctions $m\varphi(x, y, z)$, $m\varphi_1(x, y, z)$,... la somme des travaux élémentaires de ces forces sera

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = m[d.\varphi(x, y, z) + d.\varphi_1(x, y, x) + \cdots]$$
$$= md.\Sigma\varphi(x, y, z).$$

L'équation (7) nous donnera donc

$$d.\frac{mv^2}{2} = md.\Sigma\varphi(x, y, z), \quad v^2 = 2\Sigma\varphi(x, y, z) + C.$$

L'intégrale (9) de la force vive subsistera donc, la fonction φ étant, dans le cas actuel, la somme des fonctions des forces correspondantes à chacune des forces P, P_1,... considérée isolément.

148. Parmi les cas remarquables où il existe une fonction des forces et où l'intégrale (9) a lieu, nous indiquerons d'abord celui de la pesanteur. L'axe des z positifs étant vertical dans le sens de la pesanteur, les composantes de la force qui agit sur un point de masse m sont

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = mg.$$

Donc

$$Xdx + Ydy + Zdz = mgdz = md.\,gz, \quad \varphi = gz,$$

et l'intégrale de la force vive est ici

$$(10) \qquad v^2 = 2gz + C.$$

Les surfaces de niveau ont pour équation $z = \alpha$; ce sont des *plans horizontaux*. D'après la propriété du n° **146**, si le mobile part d'un plan horizontal donné, $z = z_0$, avec une vitesse initiale donnée $v = v_0$, il aura toujours une même vitesse v à l'instant où il atteindra un même plan horizontal quelconque $z = \alpha$, quel que soit le chemin suivi pour y arriver. Supposons, par exemple, que l'on ait $z_0 = 0$, $v_0 = 0$. L'équation (10) donnera

$$v^2 = 2gz,$$

d'où il suit que la vitesse du mobile, dans une position quelconque, sera la même que s'il était tombé librement et verticalement d'une hauteur égale à sa distance z au plan XY, et cela, quelle que soit la ligne droite ou courbe qu'on l'ait obligé à parcourir (**147**), pourvu que l'on fasse abstraction du frottement. En général, *que le point soit libre, ou retenu sans frottement sur une surface ou une courbe fixe, sa vitesse à chaque instant est uniquement déterminée par sa coordonnée verticale* z, au moyen de l'équation

$$v^2 = 2gz + C,$$

la constante C ayant d'ailleurs été déterminée par les données initiales.

149. Un autre cas important où il y a une fonction des forces est celui où le point M est sollicité par une force P dont la direction passe par un centre fixe O et dont l'intensité est une fonction de la distance r du point M à ce centre. Appliquant l'expression que nous avons trouvée au n° **65** pour la somme des travaux virtuels de deux forces égales et opposées dont les points d'application sont à une distance r l'un de l'autre, nous avons $-Pdr$ pour la somme des travaux élémentaires de la force P et de la réaction du point O; mais comme O est fixe, le travail de cette réaction est nul, et $-Pdr$ représente le travail élémentaire de la force P seule. Représentons par $mf(r)$ la fonction de la distance OM qui mesure l'intensité de P, la fonction f étant affectée du signe + ou du signe — suivant que la force est attractive ou répulsive, conformément à la convention du n° **65**. Le travail élémentaire de la force P sera donc

$$-mf(r)\,dr = -md\,.\,\varphi(r),$$

n posant

$$\varphi(r) = \int f(r)\, dr.$$

La fonction des forces est donc ici $-m\varphi(r)$, et c'est bien réellement une fonction des coordonnées x, y, z du point mobile, puisque r dépend de ces variables. L'intégrale de la force vive est donc

$$v^2 = -2\varphi(r) + C,$$

et la vitesse du point mobile reprend la même valeur chaque fois que le point revient à la même distance du centre d'action O.

Si le point M était sollicité par plusieurs forces dirigées vers des centres fixes et fonctions de ses distances respectives $r, r_1..,$ à ces centres, il suit de ce que nous avons prouvé au n° **146** que l'intégrale des forces vives aurait encore lieu, et que la fonction des forces serait la somme des fonctions $-m\varphi(r)$, $-m\varphi_1(r_1),\ldots$ correspondantes à l'action de chaque centre en particulier.

Exercices.

1. *Théorème de Villarceau.* — Dans le mouvement d'un point libre, on a toujours la relation

$$mv^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2 . m\rho^2}{dt^2} + U,$$

ρ désignant le rayon vecteur mené du point mobile à une origine fixe, U le travail que développerait la force motrice P si, cette force devenant constante, le point mobile se transportait en ligne droite à l'origine.

R. Remarquer que $U = -(xX + yY + zZ)$ et appliquer les équations (1).

2. Lorsqu'un point libre se meut dans un plan sous l'action d'une force constamment perpendiculaire au rayon vecteur ρ mené d'un centre fixe O au point mobile, on a l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \rho\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

θ étant l'angle polaire.

R. Conséquence du théorème précédent.

CHAPITRE XXI.

APPLICATION DES FORMULES DU CHAPITRE PRÉCÉDENT AU MOUVEMENT D'UN POINT LIBRE.

150. I — *Mouvement d'un point pesant dans le vide.* — Nous supposons un point matériel partant d'une position donnée avec une vitesse donnée, et soumis d'ailleurs à la seule action de la pesanteur. Nous prenons pour plan XY le plan vertical mené par la direction de la vitesse initiale; la force motrice étant verticale, on a $Z = 0$, d'où



$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = \text{const.}$$

Mais la constante est nulle, car, d'après l'hypothèse, la vitesse initiale est dirigée dans le plan XY et $v_z = 0$ pour $t = 0$. Donc

$$\frac{dz}{dt} = 0, \qquad z = \text{const.} = 0,$$

si l'on prend pour origine la position initiale O du mobile. Le mouvement a donc lieu dans le plan choisi pour plan XY. Prenant l'axe OX horizontal, OY vertical dans le sens de la pesanteur, ce qui donne

$$X = 0, \quad Y = mg,$$

on aura pour les équations différentielles du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Intégrons, désignons par v_0, α la vitesse initiale et l'angle qu'elle fait avec l'horizontale OX, et observons que pour $t = 0$, on a $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v_y = - v_0 \sin\alpha$. Nous trouvons

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = gt - v_0 \sin\alpha.$$

Intégrant de nouveau et observant que x, y sont nuls en même temps que t, on a

$$(2) \qquad x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t \sin\alpha.$$

Les équations (1) montrent que la composante horizontale de la vitesse est constante; sa composante verticale croît proportionnellement au temps, et, d'abord négative, devient nulle pour

$$(3) \qquad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

puis est constamment positive. Le mouvement est donc d'abord ascendant, puis descendant. Les formules (2) font connaître la position du mobile à un instant quelconque.

Eliminant t entre les équations (2), on obtient pour l'équation de la trajectoire

$$(4) \qquad y = \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tg} \alpha.$$

Cette trajectoire est donc une *parabole*, dont l'axe vertical est dirigé dans le sens de la pesanteur. Pour déterminer son sommet A (x', y') ou le point culminant de la trajectoire, posons $dy = 0$, d'où

$$x' = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad y' = -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Portons l'origine des coordonnées en ce point A : l'équation de la parabole prendra la forme

$$x^2 = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} y.$$

Le paramètre de la courbe a donc pour valeur $\frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$, et ne dépend que de la composante horizontale de la vitesse initiale. Cherchons encore le point B où le mobile atteint l'horizontale OX. Faisons $y = 0$ dans l'équation (4) : il viendra

$$x = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = 2x',$$

ce qui résulte d'ailleurs de la symétrie de la parabole par rapport à son axe. Cette distance $2x'$ se nomme l'*amplitude du jet*. Elle devient maximum, pour une valeur donnée v_0 de la vitesse initiale, lorsque $\sin 2\alpha = 1$ ou $\alpha = 45°$.

On démontrera encore sans peine les propriétés suivantes du mouvement parabolique : 1° Toutes les trajectoires qui répondent à une même

vitesse initiale v_0 et à des valeurs variables de α ont même directrice : c'est une parallèle à OX, dont l'ordonnée est

$$y = -\frac{v_0^2}{2g} = -h.$$

2° Ces paraboles ont leurs sommets sur une ellipse qui a pour équation

$$x'^2 + 4y'^2 + 4hy' = 0.$$

3° L'enveloppe de ces paraboles, ou la *courbe de sûreté,* s'obtient par l'élimination de α entre l'équation (4) et sa dérivée par rapport à α. C'est une parabole ayant pour équation

$$y = \frac{x^2}{4h} - h, \quad \text{ou} \quad x^2 = 4h(y + h).$$

4° Si l'on veut déterminer α, pour une valeur donnée de v_0, de manière à faire passer le point mobile par une position donnée M (x_1, y_1) (*problème du tir*), on est conduit à l'équation

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h(y_1 + h) - x_1^2}}{x_1}.$$

Il y a donc deux valeurs réelles pour α si le point M est dans l'intérieur de la courbe de sûreté, une seule si M est sur cette courbe, aucune si ce point est en dehors.

151. II. — *Mouvement d'une planète autour du soleil.* — Nous considérons un point matériel M sollicité vers un centre fixe O par une force proportionnelle à la masse m de ce point, et en raison inverse du carré de sa distance r au point O. La position et la vitesse initiale étant données, on demande le mouvement du point M.

Nous avons vu (**142**) que le mobile décrit une courbe plane dont le plan passe par le centre d'action O et la direction de la vitesse initiale : ce plan est donc bien connu par les données du problème et l'on peut le prendre pour plan XY, le point O pour pôle, une droite OX pour axe polaire. Le théorème des aires a lieu et fournit l'équation

$$(5) \qquad r^2 d\theta = k dt,$$

θ étant l'angle que fait le rayon vecteur r avec OX, k une constante dont la signification est connue (**142**).

La force qui agit sur le point M a pour expression, d'après l'hypothèse,

$$P = \frac{\mu m}{r^2},$$

μ étant une constante qui dépend de l'intensité d'action à l'unité de distance. Appliquons ici le théorème de la force vive (**149**); nous aurons

$$f(r)=\frac{\mu}{r^2},\quad \varphi(r)=\mu\int\frac{dr}{r^2}=-\frac{\mu}{r},\quad (6)\quad v^2=\frac{2\mu}{r}+h,$$

la constante h étant déterminée par l'équation

$$(7)\qquad h=v_0^2-\frac{2\mu}{r_0}.$$

Les équations (5) et (6) suffisent pour la solution du problème. A cause de la formule connue

$$ds^2=r^2d\theta^2+dr^2,$$

l'équation (6) peut s'écrire

$$\frac{r^2d\theta^2+dr^2}{dt^2}=\frac{2\mu}{r}+h,$$

et l'élimination de dt entre cette équation et (5) donnera l'équation différentielle de la trajectoire. On a successivement

$$\frac{k^2}{r^4}\frac{dr^2}{d\theta^2}=h+\frac{2\mu}{r}-\frac{k^2}{r^2},\qquad (8)\quad d\theta=\pm\frac{kdr}{r^2\sqrt{h+\frac{2\mu}{r}-\frac{k^2}{r^2}}}.$$

Pour intégrer cette expression de $d\theta$, posons

$$\frac{1}{r}=z,\quad \text{d'où}\quad \frac{dr}{r^2}=-dz,$$

$$d\theta=\mp\frac{kdz}{\sqrt{h+2\mu z-k^2z^2}}=\mp\frac{kdz}{\sqrt{\left(h+\frac{\mu^2}{k^2}\right)-\left(kz-\frac{\mu}{k}\right)^2}}.$$

Le double signe montre que les variables r, θ peuvent varier dans le même sens ou en sens contraire, il faut donc le conserver. On tire de l'équation précédente

$$\theta=C\pm\operatorname{arc.cos}\frac{kz-\frac{\mu}{k}}{\sqrt{h+\frac{\mu^2}{k^2}}}=C\pm\operatorname{arc\,cos}\frac{k^2z-\mu}{\sqrt{\mu^2+hk^2}},$$

C désignant la constante introduite par l'intégration ; puis

$$\frac{k^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 + hk^2}} = \cos(\theta - C), \quad z = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + hk^2}\cos(\theta - C)}{k^2},$$

et enfin, mettant pour z sa valeur en r,

$$r = \frac{k^2}{\mu + \sqrt{\mu^2 + hk^2}\cos(\theta - C)}.$$

Pour simplifier, nous poserons

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{k^2 h}{\mu}}, \quad \frac{k^2}{\mu} = a(1 - \varepsilon^2).$$

La valeur de r deviendra

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos(\theta - C)}.$$

Sous cette forme, on voit que la trajectoire est une section conique dont O est un foyer et a le demi-axe focal. On sait que la courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon > 1$; c'est-à-dire, d'après l'expression de ε, suivant que h est négatif, nul ou positif. Remontant à la valeur de h, nous trouvons donc que la trajectoire est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que l'on a

$$v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} < 0, \quad = 0, \quad > 0.$$

152. Pour plus de clarté, nous supposerons dans ce qui suit que ε soit < 1, ou que le point décrive une ellipse. En outre, l'axe polaire OX pouvant être choisi arbitrairement dans le plan de l'ellipse, nous pouvons faire en sorte que C soit réduit à zéro : il suffit pour cela de prendre pour axe polaire le grand axe de la courbe. L'équation de celle-ci deviendra

$$(9) \quad r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\theta}.$$

Il reste à exprimer r et θ en fonction du temps. Nous tirons d'abord, des relations (5) et (8),

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{h + \frac{2\mu}{r} - \frac{k^2}{r^2}}} = \pm \frac{rdr}{\sqrt{hr^2 + 2\mu r - k^2}};$$

s, des relations que nous avons posées, les valeurs de h et k en ıction de a, ε :

$$k^2 = \mu a (1 - \varepsilon^2), \quad - k^2 h = \mu (1 - \varepsilon^2), \quad h = - \frac{\mu}{a}.$$

Substituant dans l'expression de dt, nous aurons

$$(10) \qquad dt = \pm \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{rdr}{\sqrt{- r^2 + 2ar - a^2 (1 - \varepsilon^2)}}.$$

On peut obtenir l'intégrale par les méthodes ordinaires, mais on arrive à des résultats plus simples et plus élégants en posant, u désignant une variable auxiliaire,

$$r = a (1 - \varepsilon \cos u).$$

On déduit effectivement de là, sucessivement,

$$dr = a\varepsilon \sin u du, \quad - r^2 + 2ar - a^2 (1 - \varepsilon^2) = a^2 \varepsilon^2 \sin^2 u,$$

et l'égalité (10) devient, réductions faites,

$$dt = \pm \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} (1 - \varepsilon \cos u) du.$$

Intégrant et désignant par C_1 une constante, on a

$$t = C_1 \pm \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} (u - \varepsilon \sin u), \qquad (11) \quad u - \varepsilon \sin u = \pm \sqrt{\mu} \frac{t - C_1}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Enfin, pour exprimer θ en fonction de u, nous prendrons les égalités

$$r = \frac{a (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} = a (1 - \varepsilon \cos u),$$

d'où nous tirerons

$$a (1 - \varepsilon^2) = a (1 - \varepsilon \cos u) (1 + \varepsilon \cos \theta), \quad \cos \theta = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u}.$$

On obtient un résultat plus commode pour le calcul logarithmique en ıettant cette équation sous les formes

$$1 + \cos \theta = (1 - \varepsilon) \frac{1 + \cos u}{1 - \varepsilon \cos u}, \quad 1 - \cos \theta = (1 + \varepsilon) \frac{1 - \cos u}{1 - \varepsilon \cos u},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\frac{1-\cos u}{1+\cos u},$$

ou enfin

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

Cette formule élégante achève la solution du problème, les variables r, θ, t étant exprimées en fonction d'une même variable u.

Pour que le mobile fasse un tour entier et revienne à son point de départ, il faut que l'angle θ croisse de 2π, d'où il suit évidemment que l'angle u doit aussi varier de 2π. Or, d'après l'équation (11), si u augmente de 2π, $\sin u$ reprenant la même valeur, t croît d'une quantité T donnée par l'équation

$$2\pi=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}\cdot T,\quad \text{d'où}\quad \frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\mu}.$$

La constante μ étant invariable, T^2 sera proportionnel au cube du demi grand axe a de l'ellipse.

Si l'on suppose le soleil immobile, que l'on réduise cet astre et une planète quelconque à deux points matériels, l'hypothèse de Newton consiste en ce qui le soleil attire cette planète proportionnellement à la masse de celle-ci et en raison inverse du carré de sa distance au soleil. Le mouvement de la planète sera donc régi par les formules que nous venons de trouver, et qui renferment les trois *lois* dites *de Képler :*

1° *Le rayon vecteur mené du soleil à la planète décrit une aire plane qui varie proportionnellement au temps ;*

2° *La planète décrit une ellipse dont le soleil est un des foyers ;*

3° *Les carrés des durées des révolutions des planètes sont entr'eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.*

Exercices.

1. Un point matériel, animé d'une vitesse initiale horizontale v_0, décrit sous l'action d'une force verticale la chainette

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Déterminer l'intensité de la force accélératrice, la vitesse correspondante à une posi-on donnée du point, le temps qu'il met à atteindre cette position?

R. De l'équation $X = 0$ on tire $x = v_0 t$; éliminant x, on a y en fonction de t, d'où v_y et Y. On trouve

$$Y = \frac{v_0^2}{a^2} y, \quad v = \frac{v_0}{a} y, \quad t = \frac{x}{v_0}.$$

2. Un point décrit une cycloïde par l'action d'une force parallèle à la base. Trouver l'expression de la force accélératrice et celle de la vitesse en fonction de l'angle ω, les équations de la trajectoire étant

$$x = a(\omega - \sin\omega), \quad y = a(1 - \cos\omega).$$

R. On a $\quad v_y = \text{const.} = \alpha, \quad v_x = \alpha \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, \quad X = \frac{\alpha^2}{a \sin\omega (1 + \cos\omega)},$

$$v = \frac{\alpha}{\cos\frac{1}{2}\omega}.$$

3. Déterminer le mouvement d'un point sollicité vers un centre fixe O par une force proportionnelle à sa distance à ce centre.

R. L'origine étant en O, les axes rectangulaires, soient α, β les coordonnées, α', β' les composantes de la vitesse du point pour $t = 0$; μ^2 une constante positive. Les équations du mouvement seront de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y;$$

intégrant et déterminant les constantes, on trouve

$$x = \alpha \cos\mu t + \frac{\alpha'}{\mu}\sin\mu t, \quad y = \beta\cos\mu t + \frac{\beta'}{\mu}\sin\mu t;$$

l'équation de la trajectoire est

$$(\alpha' y - \beta' x)^2 + \mu^2(\alpha y - \beta x)^2 = (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2;$$

c'est une ellipse dont O est le centre. Mouvement périodique, dont la durée $T = \frac{2\pi}{\mu}$.

4. Un point se meut dans un plan sous l'action d'une force normale au rayon vecteur r mené d'un centre fixe O à ce point; la vitesse angulaire ω du rayon vecteur est constante. Trouver la trajectoire et le mouvement du point.

R. $$r = \frac{r_0}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}), \quad r = \frac{r_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

On suppose θ nul avec t. Discuter le mouvement.

5. Un point de masse m décrit une courbe par l'action d'une force passant par un ntre O et dont l'intensité $m\,f(r)$ est une fonction de la distance à ce centre. Si r) est donné, trouver l'équation différentielle de la courbe en coordonnées polaires; si courbe est connue, trouver la fonction $f(r)$.

R. La combinaison des intégrales de la force vive et des aires

$$v^2 = -2\varphi(r) + h, \quad r^2 d\theta = k dt,$$

comme au N° 151, conduit à l'équation

$$(\alpha) \quad \frac{k^2}{r^4}\frac{dr^2}{d\theta^2} + \frac{k^2}{r^2} = h - 2\varphi(r), \quad \text{d'où} \quad d\theta = \pm \frac{k dr}{r\sqrt{[h - 2\varphi(r)]r^2 - k^2}};$$

c'est l'équation différentielle de la trajectoire. Différentiant (α) et observant que $\varphi'(r) = f(r)$, on a, pour l'expression de la force accélératrice,

$$f(r) = \frac{k^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2.r^{-1}}{d\theta^2}\right).$$

6. Un point décrit la spirale logarithmique $r = ae^{\theta}$ par l'action d'une force dirigée vers le pôle asymptote et fonction de r : trouver la force accélératrice P et la vitesse v en fonction de r.

R. Application du n° précédent. On trouve

$$P = \frac{k^2}{r^3}, \quad v = \frac{k}{r},$$

k étant une constante.

7. Même problème, la trajectoire étant une circonférence et le centre d'action O placé sur la courbe.

R. Prenant O pour pôle, et désignant par μ une constante, on aura

$$f(r) = -\frac{\mu}{r^5}, \quad v^2 = \frac{\mu}{2r^4}.$$

8. Un point matériel est sollicité vers un centre fixe O par deux forces, l'une attractive et proportionnelle à la distance, l'autre répulsive et en raison inverse du cube de la distance. La vitesse initiale est normale au rayon vecteur : trouver le mouvement du point.

R. Application des intégrales des aires et de la force vive. On a

$$f(r) = -\mu r + \frac{\mu'}{r^3}, \quad v^2 = -\left(\mu r^2 + \frac{\mu'}{r^2}\right) + 2h, \quad r^2 d\theta = k dt,$$

r étant le rayon vecteur mené du point O, h et k des constantes faciles à déduire des données initiales. Posant

$$\alpha = \frac{\sqrt{k^2 + \mu'}}{k} = \frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2 + \mu'}}{v_0 r_0},$$

on trouve

$$r^2 = \frac{\alpha^2 v_0^2 r_0^2}{\alpha^2 v_0^2 \cos^2 \alpha\theta + \mu r_0^2 \sin^2 \alpha\theta}, \quad \text{tg}\, \alpha\theta = \frac{\alpha v_0}{r_0\sqrt{\mu}} \text{tg}\,(t\sqrt{\mu}),$$

$$\mu r^2 = \alpha^2 v_0^2 \sin^2 t\sqrt{\mu} + \mu r_0^2 \cos^2 t\sqrt{\mu}.$$

Discuter la trajectoire dans les différents cas.

9. Un point matériel est sollicité vers un centre fixe O par une force dont l'expression est

$$f(r) = \frac{2k^2(a^2+b^2)}{r^5} - \frac{3k^2a^2b^2}{r^7}.$$

La distance initiale au point O est a ; la vitesse initiale est normale au rayon vecteur et égale à $k : a$. Déterminer le mouvement du point.

R. Appliquant encore les intégrales de la force vive et des aires, et déterminant les constantes par les données initiales, on trouve

$$v^2 = k^2\left(\frac{a^2+b^2}{r^4} - \frac{a^2b^2}{r^6}\right), \quad r^2 d\theta = k\,dt;$$

de là on tire

$$r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta,$$

la trajectoire est la podaire d'une ellipse par rapport à son centre. Ensuite on a

$$2kt = (a^2+b^2)\,\theta + (a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta,$$

la durée T d'une révolution complète est $\frac{\pi(a^2+b^2)}{k}$; enfin, on a encore les relations

$$v^2 = \frac{k^2(a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta)}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^3}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k^2}{r^3} - f(r).$$

10. Un point décrit une parabole autour d'un centre fixe qui l'attire suivant la loi de Newton. Trouver 1° le temps t compris entre le passage au sommet et une position quelconque, en fonction de l'angle θ qui fait le rayon vecteur avec l'axe ; 2° le temps T compris entre les passages en deux points donnés, en fonction de leur distance c et de leurs rayons vecteurs r et r'.

R. Soit p le demi paramètre. D'après le N° 151 on aura

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta}, \quad k^2 = \mu p,$$

et en appliquant l'équation des aires et posant $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \zeta$, on trouvera

$$2\mu t = p\left(\zeta + \frac{1}{3}\zeta^3\right).$$

Soit, pour un second point donné, $\zeta' = \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2}$; transformant l'équation

$$2\mu T = p(\zeta'-\zeta)\left(1 + \frac{\zeta'^2 + \zeta\zeta' + \zeta^2}{3}\right),$$

on trouve

$$6\mu T\sqrt{p} = (r+r'+c)^{\frac{3}{2}} - (r+r'-c)^{\frac{3}{2}}.$$

11. Déterminer le mouvement d'un point pesant dans un milieu dont la résistance est directement opposée à la vitesse et proportionnelle à une fonction donnée de cette vitesse.

R. Soient $mgf(v)$ cette résistance, φ l'angle qui fait la direction de la vitesse avec l'horizontale OX; v_0, α les valeurs de v et de φ pour $t = 0$; l'origine au point de départ. Les équations du mouvement seront

$$(1) \quad \frac{d.\, v \cos \varphi}{dt} = -gf(v) \cos \varphi, \qquad \frac{d.\, v \sin \varphi}{dt} = -g - gf(v) \sin \varphi.$$

Eliminant $f(v)$, on a

$$(2) \quad v\frac{d\varphi}{dt} = -g \cos \varphi, \quad \text{d'où} \quad dt = -\frac{v}{g}\frac{d\varphi}{\cos \varphi}, \quad ds = -\frac{v^2}{g}\frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

$$dx = \cos \varphi ds = -\frac{v^2}{g} d\varphi, \quad dy = \sin \varphi ds = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \varphi\, d\varphi.$$

Eliminant dt entre (1) et (2) on obtient l'équation à deux variables

$$(3) \quad d.\, v \cos \varphi = vf(v)\, d\varphi,$$

dont l'intégration donnerait v, et par suite t, x, y, en fontion de φ. On intègre par approximation en supposant que, sur une portion de la trajectoire, φ varie assez peu pour que l'on puisse écrire

$$f(v) = \frac{f(\varepsilon v \cos \varphi)}{\varepsilon \cos \varphi},$$

ε étant une constante convenable.

Posant alors $\varepsilon v \cos \varphi = w$, $\varepsilon v_0 \cos \alpha = w_0$, on trouve

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\varepsilon dw}{wf(w)}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha + \varepsilon \int_{w_0}^{w} \frac{dw}{wf(w)}, \quad t = -\frac{1}{g}\int_{w_0}^{w} \frac{dw}{f(w)},$$

$$x = -\frac{1}{g\varepsilon}\int_{w_0}^{w} \frac{wdw}{f(w)}, \quad y = -\frac{1}{g\varepsilon}\int_{w_0}^{w} \frac{dw}{f(w)}\left[\operatorname{tg} \alpha + \varepsilon \int_{w_0}^{w} \frac{dw}{wf(w)}\right].$$

Le problème est ramené aux quadratures. Dans le cas d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, $f(v) = \mu v^2$. On trouve, calcul fait,

$$w = \frac{w_0}{1 + g\mu w_0 t}, \quad x = \frac{1}{g\varepsilon\mu} \text{l.} \frac{w_0}{w} = \frac{1}{g\varepsilon\mu} \text{l.}\ (1 + g\mu w_0 t),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varepsilon}{2\mu}\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{1}{w^2}\right) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g\varepsilon t}{w_0} - \frac{g^2\varepsilon\mu t^2}{2};$$

$$y = \frac{1}{g\varepsilon\mu}\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{\varepsilon}{2\mu w_0^2}\right) \text{l.} \frac{w_0}{w} + \frac{1}{4g\mu^2}\left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

$$= \frac{1}{g\mu}\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varepsilon} + \frac{1}{2\mu w_0^2}\right) \text{l.}\ (1 + g\mu w_0 t) - \frac{t}{2\mu w_0} - \frac{gt^2}{4};$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varepsilon}{2\mu w_0^2} x + \frac{1}{4g\mu^2 w_0^2}(1 - e^{g\mu\varepsilon x}),$$

équation de la trajectoire. (Voir, pour l'usage de ces équations, la *Balistique extérieure*, par M. De Tilly, pp 72-115).

CHAPITRE XXII

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE FIXE.

153. Dans les problèmes que nous avons à étudier, où il s'agit du mouvement d'un point qui n'est pas libre, nous nommons *force conservée* d'un point la résultante des forces motrices qui agissent sur lui à l'instant considéré et des réactions qu'il éprouve de la part des obstacles. C'est, en d'autres termes, la force qui, appliquée au même point supposé entièrement libre, lui communiquerait le même mouvement qu'il possède dans les conditions où il se trouve. Elle est donc représentée en grandeur et en direction par l'accélération multipliée par la masse du point.

Considérons d'abord un point qui se meut, sous l'action d'une force P, sur une courbe fixe dont on néglige le frottement : nous regarderons le point comme libre, en joignant à la force P la réaction normale inconnue N de la courbe. Soient X, Y, Z les composantes rectangulaires de la force P; x, y, z les coordonnées du mobile; λ, μ, ν les angles directeurs de la réaction N; les équations du mouvement d'un point libre (**139**) donnent

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos\lambda, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos\mu, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos\nu. \end{aligned}\right.$$

A ces équations, on joindra celles de la courbe donnée

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0, \quad \mathrm{F}_1(x, y, z) = 0,$$

la relation connue

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

et enfin celle-ci, qui exprime que la réaction N est normale à la direction de la vitesse,

$$\cos\gamma\, dx + \cos\mu\, dy + \cos\nu\, dz = 0.$$

On aura un système de sept équations pour déterminer les sept fonctions inconnues du temps x, y, z, N, λ, μ, ν. Mais la complication de ce

système dans la plupart des cas ne permet pas de l'utiliser, et l'on suit une autre méthode.

Les équations de la courbe déterminant deux des variables x, y, z en fonction de la troisième, il suffit évidemment de trouver une relation entre l'une d'elles et le temps pour achever la solution. Or, l'intégrale de la force vive fournit, dans beaucoup de cas, cette relation. Supposons, en effet, qu'il existe une fonction des forces et que l'on ait

$$Xdx + Ydy + Zdz = m\, d\varphi(x, y, z),$$

d'où résulte, comme nous l'avons prouvé, l'équation

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C,$$

C étant une constante que l'état initial fait connaître. Résolvant les équations $F = 0$, $F_1 = 0$ par rapport à x, y, par exemple, on aura

$$x = f(z),\quad y = f_1(z),\quad v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dz^2}{dt^2}[1 + f'(z)^2 + f_1'(z)^2].$$

Substituant ces valeurs de x, y, v^2 dans l'intégrale de la force vive, on trouve

$$\frac{dz^2}{dt^2}[1 + f'(z)^2 + f_1'(z)^2] = 2\varphi[f(z), f_1(z), z] + C,$$

d'où l'on tire

$$dt = \pm \frac{dz\sqrt{1 + f'(z)^2 + f_1'(z)^2}}{\sqrt{2\varphi[f(z), f_1(z), z] + C}}.$$

On aura donc t en fonction de z par une quadrature, et l'on en déduira z en fonction de t. La constante introduite par l'intégration se détermine par la valeur de z qui répond à $t = 0$.

154. Le mouvement connu, la réaction N se trouvera par une construction très-simple. Soient P_1, P_2 les composantes de P tangentiellement et normalement à la courbe, R le rayon de courbure en M. La réaction N est dans le plan normal P_2MZ, sa composante tangentielle est donc nulle; d'où il suit que la composante normale MZ de la force conservée (résultante de P et de N), laquelle est $mv^2 : R$, sera la résultante de P_2 et de N. D'autre part, la force centrifuge MZ_1 est égale et opposée à MZ; la pression N_1 du mobile sur la courbe fixe est égale et opposée à N; le parallélogramme $MP_2N_1Z_1$ nous fait donc voir que N_1 est



la résultante de P_2 et de MZ_1; donc *lorsqu'un point parcourt une courbe fixe sans frottement, la pression qu'il exerce sur elle est la résultante de la force centrifuge et de la composante normale de la force motrice.*

Or, la composante normale P_2 est connue; v^2 est connu par l'équation de la force vive, R par les équations de la courbe; la force centrifuge est donc connue, ainsi que sa direction qui est celle du prolongement du rayon de courbure. On peut donc construire N par ce qui précède.

155. *Mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical. — Théorie du pendule simple.* — Concevons que la courbe fixe soit un cercle vertical, de rayon l; que le point mobile M soit soumis seulement à l'action de la pesanteur. Soient OX un diamètre horizontal, OZ le diamètre vertical mené dans le sens de la pesanteur. Nous avons d'abord l'intégrale de la force vive



$$(1) \qquad v^2 = 2gz + C;$$

la constante C est déterminée par la formule $C = v_0^2 - 2gz_0$, v_0, z_0 se rapportant à $t = 0$. Cette équation fait déjà connaître quelques propriétés du mouvement du point. Chaque fois que z repasse par la même valeur ou que le mobile se retrouve à la même hauteur au-dessus du point le plus bas B, la vitesse reprend la même valeur: cette vitesse est d'ailleurs toujours croissante avec z. Les données initiales peuvent donner lieu à trois cas différents du mouvement :

1° Pour que la vitesse s'annule, il faut, d'après (1), que l'on ait

$$2gz + C = 0, \quad \text{ou} \quad z = -\frac{C}{2g}.$$

Or, cette condition ne peut se réaliser, le point mobile étant assujetti à rester sur le cercle, que si cette valeur de z est comprise entre $-l$ et $+l$. Supposons donc d'abord

$$-\frac{C}{2g} < -l, \quad \text{ou} \quad \frac{C}{2g} > l, \quad C > 2gl.$$

La vitesse v ne pourra devenir nulle en aucun point de la circonférence; le mobile continuera donc à se mouvoir toujours dans le même sens en parcourant la circonférence entière, avec une vitesse alternativement croissante et décroissante. La vitesse maximum correspondra à $z = l$, ou au point B; la vitesse minimum à $z = -l$, ou au point culminant C.

2° Supposons les données initiales telles que l'on ait

$$-\frac{C}{2g} = -l \quad \text{ou} \quad C = 2gl.$$

La vitesse du point ne pourra s'annuler que pour $z = -l$, donc au point culminant C : si le mobile atteint cette position, comme la force motrice y est détruite par la réaction de la courbe et que la vitesse est nulle, le point restera indéfiniment en repos ; mais si l'on cherche le temps t que le mobile mettrait à atteindre le point C, on trouve une valeur infinie, ce qui montre que C est un point asymptote dont le mobile s'approchera indéfiniment sans jamais y arriver. Ce cas singulier est évidemment sans importance pratique.

3° Le cas le plus important est celui où l'on a

$$-\frac{C}{2g} > -l \quad \text{ou} \quad \frac{C}{2g} < l, \quad C < 2gl.$$

Remarquons d'ailleurs que l'hypothèse $C < -2gl$ est impossible, car l'équation (1) entraînerait

$$v^2 < 2g(z-l) \quad \text{ou} \quad v^2 < 0,$$

ce qui est absurde. Dans l'hypothèse actuelle on a

$$-\frac{C}{2g} = \text{M}(-l, +l),$$

et, par conséquent, la vitesse v deviendra nulle, comme nous l'avons remarqué, pour $z = -\frac{C}{2g}$. Menons la droite horizontale DE représentée par cette égalité. Le mobile ne pourra jamais s'élever au-dessus de cette droite, car l'on aurait alors

$$z < -\frac{C}{2g}, \quad 2gz - C < 0, \quad v^2 < 0.$$

Lorsque le point M atteint l'un des points D, E, par exemple le premier, sa vitesse est nulle; comme le point D n'est pas une position d'équilibre, le mobile descendra suivant DB avec une vitesse croissante jusqu'en B, où v est maximum. Il s'élèvera ensuite suivant BE, et sa vitesse, en vertu de la relation (1), sera maintenant décroissante, jusqu'à s'annuler en E.

En ce point, comme en D, l'équilibre n'ayant pas lieu, le mobile redescendra suivant l'arc EB avec une vitesse croissante, puis parcourra

l'arc BD et arrivera en D avec une vitesse nulle, et ainsi du suite. En résumé, le mobile aura un mouvement oscillatoire de part et d'autre de la verticale CB, et comme la vitesse est toujours la même aux mêmes points de la trajectoire, il est visible que la durée des oscillations est invariable.

156. Déterminons la position du mobile en fonction du temps. Soit θ l'angle MOB que fait le rayon vecteur OM avec la verticale OZ, cet angle étant compté positif à gauche, négatif à droite de OZ; nommons α la valeur de θ qui répond au point D où la vitesse s'annule. En vertu des relations

$$z = l\cos\theta, \quad v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = l^2\frac{d\theta^2}{dt^2}, \quad 0 = 2gl\cos\alpha + C,$$

l'équation (1) prend la forme

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

d'où

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Le signe + correspond évidemment au mouvement dans le sens EBD, θ et t variant dans le même sens; le signe — au mouvement dans le sens DBE. Posons encore

$$\sin\frac{\alpha}{2} = k, \quad \sin\frac{\theta}{2} = kx,$$

d'où il suit, θ étant toujours compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$, que k et x sont numériquement moindres que l'unité. Nous aurons

$$\cos\frac{\theta}{2}d\theta = 2kdx, \quad d\theta = \frac{2kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}, \quad \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = k\sqrt{1-x^2},$$

et par suite

$$dt = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Admettons que l'on compte le temps à partir de l'instant où le mobile est en D : pour $t = 0$, on aura donc $\theta = \alpha$, $x = 1$, et comme le mouve-

ment a lieu dans le sens DBE, il faut d'abord prendre le signe — dans l'expression de dt. Nous aurons donc, en intégrant,

$$(2) \quad t = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

et le temps s'exprimera en fonction de x par une intégrale elliptique de première espèce. Nous avons trouvé dans le calcul intégral (COURS D'AN., 255), x et k étant moindres que l'unité, la série convergente

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right] \text{arc sin } x$$
$$- x\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\frac{k^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(x^2 + \frac{3}{2}\right)\frac{k^4}{4} + \cdots\cdots\right],$$

ce qui permettrait d'exprimer t en fonction de x avec une approximation indéfinie. Bornons-nous ici à évaluer le temps $\frac{T}{2}$ que le point met à parcourir l'arc DB et à arriver au bas du cercle, ce qui correspond dans la formule (2) à $x = 0$. Il viendra ainsi

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right] \frac{\pi}{2}$$

Or, ce temps est la moitié de celui que le mobile met à parcourir l'arc DBE, d'après la remarque faite ci-dessus; T représente donc la durée d'une demi-oscillation du mobile de part et d'autre de sa position d'équilibre, et si nous remplaçons k par sa valeur, nous aurons pour cette durée

$$(3) \quad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\cdots\right].$$

Cette série converge d'autant plus rapidement que α est plus petit.

157. *Le pendule simple* est un appareil idéal composé d'un point matériel pesant M, suspendu par un fil ou une tige sans masse et de longueur invariable à un point fixe O autour duquel la tige peut tourner librement. On écarte la tige de la verticale et l'on abandonne le système à l'action de la pesanteur : le point M décrira évidemment un cercle vertical dont le centre est en O, et son mouvement suivra les lois ci-dessus. La tige oscillera de part et d'autre de la verticale OB; la durée T de la

lemi-oscillation du pendule sera donnée par la formule (3) dans laquelle l désignera la longueur du pendule et α son écart initial par rapport à OB. Lorsque cet écart est très-petit, il est permis de négliger les termes de la série qui renferment le carré de $\sin \frac{1}{2}\alpha$, et l'on obtient la formule approchée

$$(4)\qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

La durée T est donc indépendante de la valeur de l'écart initial α ou de l'*amplitude* des oscillations. Cette propriété, qui constitue ce que l'on nomme l'*isochronisme* des oscillations du pendule, est des plus importantes ; elle sert de base à l'application du pendule pour régler le mouvement des horloges. Dans des recherches de précision, lorsque l'angle α est un peu plus grand et que l'on a besoin d'en tenir compte, on conserve un terme de plus dans la série (3) et l'on y remplace $\sin\frac{\alpha}{2}$ par $\frac{\alpha}{2}$, ce qui donne

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Dans un pendule réel, la masse pesante a toujours des dimensions finies, et de plus la tige a également une masse et un poids déterminés; néanmoins, nous verrons que le calcul des oscillations de ce pendule matériel se ramène à celui du mouvement d'un certain pendule simple, et par suite aux formules précédentes.

158. D'après la formule approchée (4), la durée de l'oscillation du pendule est proportionnelle à la racine carrée de sa longueur; elle est en outre en raison inverse de l'accélération g due à la pesanteur, et ceci fournit un moyen précis de mesurer l'intensité de la pesanteur en un lieu donné de la terre. Supposons, en effet, que l'on fasse en ce lieu osciller un pendule de longueur l, et que l'on compte le nombre n des oscillations dans un temps θ. On aura donc, T étant la durée d'une demi-oscillation,

$$T = \frac{\theta}{2n}, \quad \frac{\theta}{2n} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

et par suite

$$g = \frac{4n^2\pi^2 l}{\theta^2}.$$

Les quantités qui figurent dans le second membre étant mesurées avec exactitude, on en déduira la valeur de g. C'est par ce moyen que l'on a déterminé le nombre 9,80896 dont nous avons fait usage, et que l'on a constaté les lois de la variation de la pesanteur suivant la latitude.

159. Nous avons fait abstraction jusqu'ici du frottement que la courbe exerce sur le point mobile. Nous allons considérer, pour plus de généralité, que le mobile éprouve, soit par le frottement de la courbe, soit par la résistance d'un milieu ambiant, une réaction R directement opposée à la vitesse du point et représentée par une fonction $mf(v)$ de cette vitesse. Pour parvenir simplement à l'équation du mouvement, écrivons que le travail élémentaire de la force motrice P augmenté de celui de la réaction R égale le demi-accroissement de la force vive dans le temps infiniment petit dt. Nous aurons l'équation

$$d.\frac{mv^2}{2} = \mathrm{P}ds\cos(\mathrm{P},v) - mf(v)ds,$$

car $\cos(\mathrm{R}, v) = -1$. Admettons, de plus, que P ait une fonction des forces $m\varphi(x, y, z)$; l'équation précédente deviendra

$$(5) \qquad d.v^2 = 2\,d.\varphi(x, y, z) - 2f(v)\,ds.$$

Au moyen des équations de la courbe, on exprimera x, y, z en fonction d'une même variable auxiliaire θ, et par suite, v ou $\frac{ds}{dt}$ en fonction de θ et $\frac{d\theta}{dt}$. On aura donc à intégrer une équation différentielle du second ordre entre θ et t, et si l'on résout ce problème, x, y, z seront connus en fonction du temps et le mouvement du point sera connu.

Exercices.

1. Démontrer que si, dans un cercle vertical, on mène des cordes CA, CB,... du point le plus élevé C à la circonférence, toutes ces cordes sont parcourues par un point pesant dans un même temps égal à $2\sqrt{\frac{a}{g}}$, a étant le rayon du cercle, la vitesse en C nulle. Le frottement est supposé négligeable.

2. Un point pesant se meut sans frottement sur une cycloïde renversée, à base horizontale. Déterminer son mouvement et en particulier le temps T que le mobile met à arriver au point le plus bas de la courbe.

R. Appelons a le rayon du cercle générateur, z la distance MP du mobile à la base, z_0 la valeur de z correspondante au point A où la vitesse est nulle ; s l'arc BM compté du point le plus bas jusqu'en M, s_0 l'arc BA. On a les formules

$$v^2 = 2gz + C, \quad 0 = 2gz_0 + C, \quad v^2 = 2g(z - z_0).$$

On trouve facilement, soit par l'expression connue de l'arc de cycloïde, soit par la propriété de la développée, la relation

$$s = 2\sqrt{2a(2a - z)},$$

d'où l'on tire

$$z = 2a - \frac{s^2}{8a}, \quad z_0 = 2a - \frac{s_0^2}{8a}, \quad \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{g}{4a}(s_0^2 - s^2),$$

$$dt = \mp 2\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}}, \quad s = s_0 \cos\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Le point M a un mouvement oscillatoire de part et d'autre du point B. On a

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}};$$

la durée de l'oscillation est indépendante de l'amplitude : la cycloïde est une courbe *tautochrone*.

3. Un point pesant parcourt sans frottement une hélice dont l'axe est vertical. Déterminer le mouvement du point, sa vitesse à un instant donné, la réaction normale de l'hélice.

R. L'axe des z positifs suivant l'axe de l'hélice, de haut en bas ; le plan XY passant par le point où la vitesse est nulle ; a le rayon du cylindre, τ l'angle sous lequel l'hélice coupe les génératrices du cylindre. On trouve

$$z = \frac{gt^2}{2}\cos^2\tau, \qquad v = gt\cos\tau \text{ (\textit{Mouv. unif. varié})}.$$

La réaction normale de l'hélice est la résultante d'une force égale à

$$\frac{mg^2t^2\cos^2\tau\sin^2\tau}{a} = \frac{2\,mgz\sin^2\tau}{a}$$

dirigée perpendiculairement à l'axe, et d'une force verticale $mg\sin\tau$ en sens contraire de la pesanteur.

4. Un point M, sollicité vers un centre O par une force qui est une fonction donnée $mf(r)$ de la distance OM $= r$, est assujetti à se mouvoir sans frottement sur une droite fixe AX. Il est écarté d'une très-petite quantité x_0 de la projection A du point O sur la droite fixe, et abandonné sans vitesse. Quel est son mouvement?

R. Appelons x la distance AM, a la perpendiculaire OA ; l'équation du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f(r)\frac{x}{r},$$

en observant que $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ et négligeant les termes en x^2 dans le développement de r^{-1} et de $f(r)$, devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2 x = 0, \quad \left[\mu^2 = \frac{f(a)}{a}\right].$$

On tire de là

$$x = x_0 \cos \mu t, \quad v = -\mu x_0 \sin \mu t.$$

Mouvement oscillatoire périodique.

5. Un point se meut sans frottement sur une spirale logarithmique $r = ae^{\alpha\theta}$, sous l'action d'une force dirigée vers le pôle O et égale à $m\mu : r^2$. Pour $t = 0$, on a $v = 0$, $r = a$. Déterminer le temps T que le mobile met à atteindre le pôle O.

R. L'intégrale de la force vive donne

$$v^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Exprimant ds en fonction de r et dr, on trouvera

$$T = \frac{\sqrt{a(\alpha^2 + 1)}}{\alpha\sqrt{2\mu}} \int_0^a r^{\frac{1}{2}} (a - r)^{-\frac{1}{2}} dr = \frac{\pi}{2\alpha}\sqrt{\frac{a^3(\alpha^2 + 1)}{2\mu}}.$$

6. Mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical, en supposant une résistance directement opposée à la vitesse et proportionnelle à celle-ci (*Pendule simple dans un milieu résistant*).

R. Soient l le rayon du cercle, θ l'angle du pendule avec la verticale. On fera dans l'équation (5)

$$v = -l\frac{d\theta}{dt}, \quad f(v) = -kl\frac{d\theta}{dt}, \quad \varphi(x, y, z) = gl\cos\theta, \quad ds = -l\,d\theta,$$

et l'on aura pour l'équation différentielle du mouvement

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Pour de très-petites oscillations, on peut remplacer $\sin\theta$ par θ; on retombe sur l'équation de l'ex. 5, ch. XIX. Les conclusions trouvées sont applicables. Mouvement oscillatoire à oscillations de durée constante, d'amplitude décroissante.

CHAPITRE XXIII.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE FIXE.

160. Lorsqu'un point matériel est assujetti sur une surface fixe, dont l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

est donnée et dont le frottement est négligeable, on peut encore appliquer les équations du mouvement d'un point libre en joignant à la force motrice P la réaction normale N de la surface. Les cosinus directeurs de N sont (**61**)

$$\pm \frac{1}{V} \frac{dF}{dx}, \quad \pm \frac{1}{V} \frac{dF}{dy}, \quad \pm \frac{1}{V} \frac{dF}{dz},$$

et les équations différentielles du mouvement seront par conséquent,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X \pm \frac{N}{V} \frac{dF}{dx}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y \pm \frac{N}{V} \frac{dF}{dy}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z \pm \frac{N}{V} \frac{dF}{dz}. \end{aligned} \right.$$

L'équation de la surface, jointe aux équations (1) et aux données initiales, détermine les quatre fonctions inconnues du temps x, y, z et N.

Le double signe qui affecte les termes en N se rapporte aux deux directions opposées suivant lesquelles la réaction de la surface peut agir, l'une *extérieure*, l'autre *intérieure*. On considérera $(\pm N)$ comme une inconnue que l'on éliminera entre les équations (1), et lorsque l'on aura trouvé x, y, z en fonction de t, la substitution de leurs valeurs dans une des équations (1) donnera la valeur de $(\pm N)$, et par le signe qu'elle lui attribuera fera connaître si c'est le signe supérieur ou le signe inférieur qu'il faut adopter dans les équations (1) : par suite, on saura dans quel sens la réaction N s'exerce.

161. Lorsqu'il existe une fonction des forces, on a

$$X dx + Y dy + Z dz = m\, d.\varphi(x, y, z),$$

et l'intégrale de la force vive a lieu (**147**), ce qui facilite la solution du

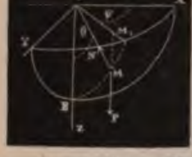
problème. On montrerait facilement, comme nous l'avons fait pour le mouvement sur une courbe fixe, que la pression sur la surface est la résultante de la force centrifuge et de la composante de P normalement à la trajectoire ; mais comme ici la première de ces deux forces n'est pas connue en direction, cette construction n'offre plus les mêmes avantages.

Si le point mobile n'est sollicité par aucune force motrice P et que la réaction de la surface agisse seule, l'intégrale de la force vive devient

$$v^2 = C\,;$$

le *mouvement est uniforme*. De plus, la composante normale de P disparaissant, la pression du point sur la surface se confond en grandeur et direction avec la force centrifuge $v^2 : R$; donc *le rayon de courbure de la trajectoire est dirigé, en chaque point, suivant la normale à la surface* $F = 0$. Une courbe tracée sur une surface et jouissant de la propriété précédente se nomme une *ligne géodésique* de la surface : elle est, en général, la plus courte que l'on puisse mener sur celle-ci entre deux quelconques de ses points.

162. Comme exemple du mouvement d'un point sur une surface, nous étudierons celui d'un point pesant sur une surface sphérique. Prenons le centre O pour origine, l'axe positif OZ vertical dans le sens de la pesanteur; soit a le rayon de la sphère. On a ici



$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg.$$

Les cosinus directeurs de la normale en M (x, y, z) vers le centre étant $-\frac{x}{a}$, $-\frac{y}{a}$, $-\frac{z}{a}$, nous aurons, en considérant pour éviter les doubles signes, la quantité N comme positive ou négative selon que la réaction agit vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la sphère,

$$(2) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Nx}{a}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ny}{a}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - \frac{Nz}{a}.$$

L'équation de la force vive devient

$$(3) \qquad v^2 = 2gz + C.$$

Introduisons comme variables l'angle θ que fait le rayon OM avec OZ, et l'angle ψ que fait le plan mobile ZOM avec le plan fixe XZ. La vitesse angulaire du plan ZOM autour de la verticale étant $\frac{d\psi}{dt}$, la vitesse d'en-

traînement du point M par ce plan sera $a \sin\theta \frac{d\psi}{dt}$; sa vitesse relative dans ce plan mobile est évidemment $a \frac{d\theta}{dt}$, et comme ces deux composantes sont perpendiculaires l'une à l'autre, on a, pour la vitesse totale v,

$$v^2 = a^2\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2}\right).$$

Substituons dans (3), divisons par a^2, remplaçons z par $a\cos\theta$, posons $C = a^2 h$; il viendra

$$(4) \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} = \frac{2g}{a}\cos\theta + h.$$

D'autre part, la force motrice mg et la réaction N étant toutes deux dans le plan vertical ZOM, leur résultante va rencontrer l'axe OZ, et le théorème des aires a lieu pour le plan XY (**142**). On a donc

$$\rho^2 d\psi = a^2 \sin^2\theta d\psi = C_1\, dt,$$

ou, divisant par $a^2 \sin^2\theta dt$ et posant $C_1 = a^2 k$,

$$(5) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{k}{\sin^2\theta}.$$

L'élimination de $D_t\psi$ entre (4) et (5) conduit à l'équation

$$(6) \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} = h + \frac{2g}{a}\cos\theta - \frac{k^2}{\sin^2\theta},$$

d'où l'on tire

$$dt = \pm \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\left(h + \frac{2g}{a}\cos\theta\right)\sin^2\theta - k^2}},$$

ou encore, en posant $\cos\theta = u$,

$$(7) \quad dt = \mp \frac{du}{\sqrt{\left(h + \frac{2g}{a}u\right)(1-u^2) - k^2}}.$$

La valeur de t en fonction de u s'obtient ainsi par une quadrature qui se ramène aux intégrales elliptiques ([1]); connaissant t en fonction de $\cos\theta$, on en déduit θ en fonction de t. L'équation (5) devient

$$(8) \quad d\psi = \mp \frac{k\,du}{(1-u^2)\sqrt{\left(h + \frac{2g}{a}u\right)(1-u^2) - k^2}}.$$

([1]) Cette solution sera développée dans la seconde partie du cours.

Les constantes h, k et celles qu'introduisent les quadratures (7) et (8) se déterminent par les données initiales. Soient θ_0, ψ_0, θ'_0, ψ'_0 les valeurs, pour $t = 0$, de θ, ψ, et de leurs dérivées par rapport au temps. On a, par les équations (4) et (5)

$$h = \theta_0'^2 + \psi_0'^2 \sin^2\theta_0 - \frac{2g}{a}\cos\theta_0, \quad k = \psi'_0 \sin^2\theta_0.$$

Quand $\psi'_0 = 0$, ou que la vitesse initiale du mobile est dans un plan passant par la verticale OZ, $k = 0$ et l'on retombe, comme on le voit facilement, sur l'équation du mouvement du pendule simple.

On détermine la réaction N pour une position quelconque du point mobile, en ajoutant membre à membre les équations (2) multipliées respectivement par x, y, z. On a

$$m\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right) = mgz - \mathrm{N}\frac{x^2+y^2+z^2}{a} = mgz - \mathrm{N}a.$$

Mais la relation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, différentiée deux fois, donne

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0, \quad x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = -v^2,$$

ce qui transforme l'équation ci-dessus en celle-ci

$$\mathrm{N} = \frac{m(v^2 + gz)}{a} = \frac{m(3gz + \mathrm{C})}{a},$$

en vertu de l'équation (3). Cette formule montre que N est toujours positif en même temps que z, c'est-à-dire que la réaction N est dirigée vers l'intérieur de la sphère lorsque le mobile est au-dessous du plan horizontal mené par le centre O.

163. La solution du problème s'achève entièrement quand on suppose que l'angle θ reste toujours très-petit pendant toute la durée du mouvement, en sorte que le mobile s'éloigne toujours très-peu du point le plus bas B. Négligeant le cube de θ, on posera alors

$$\sin\theta = \theta, \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

et l'on aura

$$dt = \pm\frac{\theta d\theta}{\sqrt{h\theta^2 + \frac{2g}{a}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\theta^2 - k^2}} = \pm\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{\theta d\theta}{\sqrt{-\theta^4 + \left(\frac{ah}{g} + 2\right)\theta^2 - \ldots}}$$

Désignons par α^2, β^2 les valeurs de θ^2 pour lesquelles la qualité sous le radical s'évanouit, valeurs faciles à calculer. Nous pourrons écrire

$$=\pm\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{\theta d\theta}{\sqrt{-\theta^4+(\alpha^2+\beta^2)\theta-\alpha^2\beta^2}}=\pm\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{\theta d\theta}{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2-\left(\theta^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2}}.$$

Intégrant et observant que la constante est nulle, si l'on compte le temps t à partir de l'instant où $\theta=\alpha$, on aura

$$t=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\arccos\frac{2\theta^2-(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2},$$

d'où

$$2\theta^2-(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2)\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

ou enfin

$$(9)\qquad \theta^2=\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}+\beta^2\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Cette équation montre que l'angle θ oscille périodiquement entre les limites $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$, la durée τ de la période comprise entre ce maximum et ce minimum de l'angle θ étant $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Pour calculer l'angle ψ en fonction du temps, reprenons l'équation (5) : il viendra, avec l'approximation adoptée,

$$d\psi=\frac{kdt}{\sin^2\theta}=\frac{kdt}{\theta^2}=\frac{kdt}{\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}+\beta^2\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}}.$$

L'intégration donne, en choisissant le plan XZ de telle façon que l'on ait $\psi=0$ pour $t=0$,

$$\psi=\frac{k}{\alpha\beta}\sqrt{\frac{a}{g}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg} t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

On simplifie cette expression de ψ en remarquant que, d'après la signification des quantités α^2, β^2, on a

$$\alpha^2\beta^2=\frac{ak^2}{g},\quad \text{d'où}\quad \frac{k}{\alpha\beta}\sqrt{\frac{a}{g}}=1,$$

donc

$$\psi=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg} t\sqrt{\frac{g}{a}}\right),\quad \text{ou}\quad \operatorname{tg}\psi=\frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg} t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Cette équation détermine l'angle ψ en fonction de t, et fait voir que ψ croît indéfiniment avec t, en passant par les valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$ aux époques $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau, \ldots$, c'est-à-dire aux époques correspondantes au maximum et au minimum de l'angle θ. Le plan ZOM tourne donc autour de la verticale OZ, toujours dans le même sens, en faisant une révolution entière dans un temps égal à $4\tau = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Enfin, l'on déduit de la relation entre ψ et t

$$\frac{\sin\psi}{\beta\sin t\sqrt{\frac{g}{a}}} = \frac{\cos\psi}{\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{a}}} = \frac{1}{\left[\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} + \beta^2\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\theta},$$

d'où

$$\theta\sin\psi = \beta\sin t\sqrt{\frac{g}{a}}, \quad \theta\cos\psi = \alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

et, par suite,

$$x = a\sin\theta\cos\psi = a\theta\cos\psi = a\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

$$y = a\sin\theta\sin\psi = a\theta\sin\psi = a\beta\sin t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

d'où enfin, éliminant t,

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = a^2.$$

Cette équation représente la trajectoire de la projection du point mobile sur le plan XY; elle montre que cette projection décrit une petite ellipse dont le centre est en O, et dont les demi-axes sont $a\alpha$, $a\beta$.

Exercices.

1. Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné, sans frottement.

R. Prenons le point de départ pour origine O, l'axe OZ vertical dans le sens de la pesanteur; l'axe OY horizontal dans le plan incliné; soient α l'inclinaison du plan sous le plan horizontal, v_0 la vitesse initiale dans le plan, β l'angle que sa direction fait avec OY. Les équations du mouvement seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{N}\sin\alpha, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - \mathrm{N}\cos\alpha,$$

et l'on trouvera

$$x=\left(\frac{gt^2}{2}\sin\alpha - v_0 t\sin\beta\right)\cos\alpha,\quad y = v_0 t\cos\beta,\quad z=\left(\frac{gt^2}{2}\sin\alpha - v_0 t\sin\beta\right)\sin\alpha,$$

$$x=\left(\frac{g\sin\alpha}{2v_0^2\cos^2\beta}y^2 - y\,\mathrm{tg}\,\beta\right)\cos\alpha,\quad N = mg\cos\alpha.$$

La trajectoire est une parabole; la pression sur le plan est constante.

2. Un point matériel pesant se meut sur une surface en s'écartant toujours très-peu du point le plus bas O de celle-ci; déterminer son mouvement.

R. Plaçons l'origine en O, l'axe des z vertical vers le haut, le plan XY horizontal tangent à la surface en O; x, y, z sont supposés rester très-petits. Développant z par la formule de Maclaurin suivant les puissances de x, y; observant que z_0, p_0, q_0 sont nuls, et négligeant les termes du 3me ordre en x, y, on obtient un résultat de la forme

$$z=\frac{1}{2}(r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2)$$

que l'on réduit, par un choix convenable des axes OX, OY, à la forme

$$2z = \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'},$$

R, R' étant des constantes connues. En négligeant toujours les termes d'ordre supérieur, on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Nx}{R},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ny}{R'},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g + N,\quad N = g,$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{R} = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{gy}{R'} = 0,$$

équations faciles à intégrer. Discuter les formules.

3. Un point est assujetti à se mouvoir sur la surface conique $z^2 = 2xy$; les composantes de la force accélératrice qui le sollicite sont

$$X = -\frac{v_x^2}{x},\quad Y = -\frac{v_y^2}{y},\quad Z = -\frac{v_z^2}{z};$$

déterminer son mouvement et la réaction de la surface. Examiner en particulier le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur.

R. Formant les équations (1), et éliminant N par des combinaisons convenables, on trouve les intégrales

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\mu t + \nu,\quad x^2 - y^2 = 2\mu' t + \nu',$$

μ, ν, μ', ν' étant des constantes que déterminent les données initiales. Combinées avec l'équation de la surface, ces équations donnent

$$x + y = \sqrt{2\mu t + \nu},\quad x - y = \frac{2\mu' t + \nu'}{\sqrt{2\mu t + \nu}},$$

d'où l'on tire ensuite

$$x = \frac{2(\mu + \mu')t + \nu + \nu'}{2\sqrt{2\mu t + \nu}},\quad y = \frac{2(\mu - \mu')t + \nu - \nu'}{2\sqrt{2\mu t + \nu}},$$

$$z^2 = \frac{(2\mu t + \nu)^2 - (2\mu' t + \nu')^2}{2(2\mu t + \nu)}.$$

Enfin, les équations différentielles du mouvement donnent

$$N = \frac{1}{2x}\frac{d^2.x^2}{dt^2} + \frac{1}{2y}\frac{d^2.y^2}{dt^2}.$$

Dans le cas particulier indiqué, μ est nul, r est constant, la projection de la trajectoire sur le plan XY est une droite $x + y = \sqrt{\nu}$, etc.

4. Lorsqu'un point M se meut sur une surface sous l'action d'une force accélératrice P, si γ désigne l'angle compris entre la direction de P et celle de la normale à la surface en M, α l'angle compris entre la projection de P sur le plan tangent en M et la vitesse du point, θ l'angle du plan osculateur de la trajectoire avec le plan tangent, $d\varphi$ l'angle de contingence de la trajectoire, N la réaction de la surface, démontrer que l'on a

$$v^2 \cos\theta d\varphi = P \sin\gamma \sin\alpha ds, \quad N = v^2 \sin\theta \frac{d\varphi}{ds} - P\cos\gamma,$$

$$v = Ce^{\int \cos\theta \cot\alpha\, d\varphi} \; (c = \text{const.}).$$

Cas où la surface est plane et la direction de P constante.

5. Démontrer que si un point se meut sur une surface sphérique de rayon égal à l'unité, la direction de la force P étant constamment dans le plan méridien passant par le point mobile, la vitesse a pour expression

$$v = \frac{C}{\sin\alpha \sin\rho} = \frac{C}{\sin p},$$

ρ étant le rayon vecteur sphérique mené du pôle au point mobile, p la distance sphériq du pôle à l'arc de grand cercle tangent à la trajectoire.

R. On fera usage de l'expression de v donnée à l'ex. 4, et des formules, pages 231 et du *Cours d'Analyse.*

6. Lorsqu'un point se meut sur une surface sphérique et n'est soumis d'ailleurs qu l'influence du frottement, à un instant quelconque, sa force vive est égale au produ du rayon de la sphère par la pression que le point exerce sur celle-ci.

R. Conséquence du théorème de Villarceau.

CHAPITRE XXIV.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LE MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

164. Nous exposerons plus loin la méthode de d'Alembert pour former les équations différentielles du mouvement d'un système quelconque, mais nous pouvons dès à-présent, au moyen des simples équations du mouvement d'un point libre (**139**), établir directement quelques

propriétés générales applicables au mouvement de tout système matériel, et qui, outre qu'elles constituent les plus beaux théorèmes de la dynamique, fournissent encore dans beaucoup de cas certaines intégrales des équations du mouvement dont la connaissance facilite singulièrement la solution des problèmes.

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, tout système matériel, quelles que soient les forces qui agissent sur lui et les liaisons qui existent entre ses parties, quels que soient les obstacles qui gênent ses mouvements, constitue en définitive un assemblage de points matériels, dont le nombre immense échappe à toutes nos mesures, isolés et agissant les uns sur les autres suivant des lois déterminées. Les forces qui sollicitent ces points se rangent dans deux catégories : 1° Les *forces intérieures*, ou qui résultent des actions réciproques des points appartenant au système ; telles sont les forces moléculaires, les réactions développées dans l'intérieur des liaisons, les attractions ou répulsions à des distances sensibles, etc. En vertu du troisième principe de la mécanique, ces forces intérieures sont nécessairement deux-à-deux égales et directement opposées; 2° Les *forces extérieures*, c'est-à-dire celles qui proviennent de points, de corps, en général de causes quelconques situées en dehors du système. Telles sont la pesanteur si le système se réduit à un corps placé à la surface de la terre ; nos propres efforts physiques s'exerçant sur un tel corps; l'attraction du soleil pour tout système faisant partie de notre globe, etc. Si le système matériel considéré est gêné par des obstacles fixes, comme des points fixes, un plan résistant, les réactions de ces obstacles sur le système doivent être rangées parmi les forces extérieures. En les joignant aux forces motrices qui sollicitent le système, celui-ci pourra toujours être regardé comme libre.

En résumé, il est clair que nous pouvons toujours appliquer à chacun des points matériels du système, si nous tenons compte de toutes les forces, extérieures ou intérieures, qui agissent sur lui, les trois équations du mouvement d'un point libre, données au N° **139**.

165. I. *Théorème de la conservation de la quantité totale de mouvement.* — Soient, à une époque quelconque t, m la masse, x, y, z les coordonnées rectangles d'un point quelconque M du système; X, X_1 les sommes des composantes parallèles à OX des forces extérieures et intérieures qui sollicitent ce point; Y, Y_1, Z, Z_1, les sommes semblables pour

les axes OY, OZ; le mouvement du point M est déterminé par les trois équations

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1.$$

Chaque point du système donnant lieu à trois équations pareilles, si nous ajoutons membre à membre les équations relatives à un même axe pour tous les points du système, et si nous désignons par Σ une somme qui s'étend à tous ces points, nous aurons

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + \Sigma X_1, \quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y + \Sigma Y_1, \quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z + \Sigma Z_1.$$

Mais les forces intérieures sont deux-à-deux égales et directement opposées; leurs composantes parallèles à un même axe sont donc deux-à-deux égales et de signes contraires; donc $\Sigma X_1 = 0$, $\Sigma Y_1 = 0$, $\Sigma Z_1 = 0$, et par suite

$$(2) \qquad \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X, \quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y, \quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

D'ailleurs, toute droite de l'espace peut être choisie comme axe des x; donc, la première de ces équations suffit pour donner ce théorème :

Dans tout système matériel en mouvement, à un instant quelconque, la somme algébrique des projections des forces conservées de tous les points sur un axe quelconque, est égale à la somme des projections des forces extérieures sur ce même axe.

Les équations (2) peuvent s'écrire ainsi :

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\Sigma mv_x = \Sigma X, \quad \frac{d}{dt}\Sigma mv_y = \Sigma Y, \quad \frac{d}{dt}\Sigma mv_z = \Sigma Z.$$

Or, mv_x, mv_y, mv_z sont les composantes de la quantité de mouvement du point M. Concevons que l'on fasse, comme dans la statique des solides, la réduction des quantités de mouvement de tous les points du système au point O, pris pour centre de réduction : Σmv_x, Σmv_y, Σmv_z seront les composantes suivant OX, OY, OZ de la force résultante, ou encore, si nous représentons par une droite OV cette résultante des quantités de mouvement transportées à l'origine, les coordonnées ξ, η, ζ du point V, extrémité de cette droite. Si donc nous imaginons un point

mobile coïncidant à chaque instant avec ce point V, les composantes de sa vitesse seront

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d}{dt}\Sigma mv_x,\quad \frac{d\eta}{dt}=\frac{d}{dt}\Sigma mv_y,\quad \text{etc.},$$

et les équations (3) deviendront

$$\frac{d\xi}{dt}=\Sigma X,\quad \frac{d\eta}{dt}=\Sigma Y,\quad \frac{d\zeta}{dt}=\Sigma Z.$$

Mais ΣX, ΣY, ΣZ sont les composantes parallèles à OX, OY, OZ de la résultante des forces extérieures transportées parallèlement à elles-mêmes au point O. De là le théorème suivant : *Dans un système matériel en mouvement, si l'on détermine pour un instant quelconque la résultante* OV *des quantités de mouvement de tous les points du système et la résultante* OR *des forces extérieures pour un même centre de réduction fixe, cette seconde droite* OR *représentera, en grandeur et en direction, la vitesse du point* V, *extrémité de la première.*

166. Supposons qu'il n'y ait pas de forces extérieures; ou, plus généralement, que ces forces vérifient les équations

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0;$$

les équations (3) donneront évidemment, par l'intégration,

$$(4)\qquad \Sigma mv_x=A,\quad \Sigma mv_y=B,\quad \Sigma mv_z=C,$$

équations qui peuvent s'énoncer ainsi :

Lorsque les forces extérieures qui sollicitent un système matériel quelconque sont nulles à chaque instant, ou telles qu'étant transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles s'y feraient équilibre, la somme des projections des quantités de mouvement de tous les points du système, sur un axe fixe quelconque, reste constante pendant toute la durée du mouvement.

Et, par conséquent, *la résultante des quantités de mouvement de tous les points du système, transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, reste constante en grandeur et en direction pendant toute la durée du mouvement.*

C'est en cela que consiste le théorème de *la conservation de la quantité totale de mouvement.*

167. — II. *Théorème du mouvement du centre de gravité.* — Repre-

nons les équations (2); soient M la masse totale du système proposé; x_1, y_1, z_1 les coordonnées, à l'époque t, de son centre de gravité. Nous avons, comme on l'a vu (**101**),

$$Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my, \quad Mz_1 = \Sigma mz,$$

et par suite, à chaque instant,

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma\, m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma\, m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma\, m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Les équations (2) donnent donc celles-ci :

$$(5) \qquad M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X, \qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Or, ces équations sont précisément celles du mouvement d'un point libre qui aurait une masse M, dont les coordonnées seraient x_1, y_1, z_1, et qui serait soumis à l'action d'une force ayant pour composantes ΣX, ΣY, ΣZ, c'est-à-dire de la résultante des forces extérieures transportées en un même point. Si donc cette masse M a même position et même vitesse initiales que le centre de gravité du système, elle coïncidera constamment avec lui. De là le *théorème du mouvement du centre de gravité :*

Dans tout système matériel en mouvement, le centre de gravité se meut comme si toute la masse du système était concentrée en ce point, et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes.

Si, en particulier, les forces extérieures satisfont constamment aux équations

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

le centre de gravité se meut comme un point qui n'est sollicité par aucune force ; donc *lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, ou lorsque ces forces sont telles que, transportées à chaque instant en un même point, elles s'y feraient équilibre, le centre de gravité du système ne peut avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme.*

168. Les théorèmes précédents conduisent à des conséquences importantes. En premier lieu, le problème que nous avons étudié dans les premiers chapitres de la dynamique, celui du mouvement d'un simple point matériel, cesse d'être une pure abstraction pour trouver une application remarquable dans le mouvement des corps réels. Nous

voyons en effet que dans tout corps, dans tout système matériel mobile, il y a un point particulier auquel s'appliquent les formules et les propriétés du mouvement précèdemment étudié, et ce point est le centre de gravité du système. En sorte que si les forces extérieures sont connues, à chaque instant, en grandeur et en direction, il suffira de les supposer transportées au centre de gravité pour déterminer directement, au moyen des théories du chapitre XX, le mouvement de ce centre, sans que l'on ait à se préoccuper soit des forces intérieures, soit des mouvements que le système peut avoir autour de son centre de gravité. C'est ainsi que, dans l'astronomie, on détermine le mouvement d'une planète autour du soleil en la réduisant d'abord à son centre de gravité, où l'on suppose réunie toute la masse de la planète.

Lorsque le système considéré n'est pas libre, il faut, comme on l'a vu, ranger au nombre des forces extérieures les réactions des obstacles, et le théorème du mouvement du centre de gravité est encore vrai dans ces conditions. Mais ces réactions étant elles-mêmes des forces inconnues dont la direction et l'intensité dépendent du mouvement du système et dont la détermination est un des objets du problème, le théorème ne fournit plus le moyen de calculer isolément le mouvement du centre de gravité, et l'avantage qu'on en retirait dans le cas d'un système libre n'existe plus.

169. Il résulte du théorème général énoncé plus haut que les forces intérieures qui existent ou se développent entre les différents points d'un système matériel, quelles qu'elles soient, sont absolument sans effet sur le mouvement de son centre de gravité, qui se déplace exclusivement sous l'influence des forces extérieures. Ainsi les chocs, les explosions, les réactions moléculaires, les combinaisons chimiques qui peuvent se produire entre les points du système ne troublent pas le mouvement du centre de gravité; si celui-ci est primitivement en repos, et qu'aucune force extérieure n'agisse sur le système, toutes ces actions intérieures ne pourront jamais déplacer le centre de gravité. C'est en cela, proprement, que consiste le principe de la *conservation du mouvement du centre de gravité.*

Par exemple, lorsque la force expansive des gaz développés par la combustion de la poudre lance au dehors le projectile d'une pièce d'artillerie, les actions auxquelles ce mouvement doit son origine sont purement intérieures, par rapport au système composé de la pièce, du projectile et

de la poudre. Si donc on fait abstraction de la réaction verticale du sol et de la pesanteur, forces extérieures qui sont sans influence sur le mouvement dans le sens horizontal, il faut que le centre de gravité de ce système reste immobile après l'explosion comme il l'était avant; aussi, pendant que le projectile et les gaz se transportent dans un sens, la pièce se meut en sens contraire : telle est la cause du *recul*. Si le frottement de la pièce contre le sol ne venait agir comme *force extérieure*, si elle était posée sur un plan parfaitement poli, cette immobilité rigoureuse du centre de gravité pourrait se constater.

Supposons qu'il s'agisse d'une bombe, et considérons-la isolément après sa sortie de la pièce. Son centre de gravité se meut comme un point matériel auquel serait appliquée la résultante des actions que la pesanteur exerce sur tous les points de la bombe, c'est-à-dire une force verticale égale au poids de celle-ci. Si donc nous faisons abstraction de la résistance de l'air, son mouvement sera celui d'un point matériel pesant, étudié au nº **150**; il décrira une parabole à axe vertical suivant la loi trouvée. A un instant donné, le projectile fait explosion ; ses fragments sont projetés en tous sens, les gaz de la poudre se répandent dans l'espace; mais, comme les actions chimiques qui déterminent l'explosion se sont, par rapport à la bombe, que des forces intérieures, elles ne peuvent modifier le mouvement de son centre de gravité. Donc, après l'explosion du projectile, le centre de gravité du système composé de ses fragments et des molécules des gaz développés continue à décrire la même parabole, avec la même vitesse qu'il aurait eue si la bombe fût restée intacte. Il en est ainsi jusqu'au moment où l'un des fragments de la bombe atteint le sol ; alors, la réaction du sol intervient comme une force extérieure qui modifie le mouvement du centre de gravité.

Les forces mises en jeu dans le corps humain sous l'influence de la volonté, et en vertu desquelles nous pouvons mouvoir nos membres, tourner la tête, etc., ne sont encore par rapport au système du corps entier que des forces intérieures toujours accompagnées de réactions égales et contraires : elles ne peuvent déplacer le centre de gravité du corps. Un homme entièrement isolé dans l'espace et soustrait à toute action étrangère pourrait bien remuer les bras, les jambes, exécuter une foule de mouvements; il ne réussirait pas à déplacer si peu que ce soit son centre de gravité. Quand, dans la marche, nous portons le haut du corps en avant, la partie inférieure tend à se porter en arrière; mais le

ol sur lequel nous nous appuyons s'y oppose, et c'est la réaction de cet obstacle qui, agissant comme une force extérieure, porte en avant notre centre de gravité. C'est pourquoi, sur un sol très-glissant, comme la glace, cette réaction faisant défaut dans le sens horizontal, il devient très-difficile d'avancer.

Des remarques semblables s'appliquent au mouvement d'un train sur une voie ferrée, et, en général, à tous les mouvements que nous produisons à la surface de la terre par des moteurs vivants ou inanimés; à tous ceux qui résultent des actions naturelles, telles que les éruptions volcaniques, les chûtes d'eau, etc. Les forces qui agissent ici, considérées par rapport à l'ensemble du globe terrestre, ne sont que des forces intérieures; elles n'influent nullement sur le mouvement du centre de gravité de la masse totale, et pendant que certains corps se déplacent dans un sens, il faut que d'autres se meuvent en sens contraire, pour ne pas troubler la trajectoire que ce centre décrit sous l'influence des forces extérieures.

Enfin, si nous appliquons ces considérations à un système plus vaste encore, celui que forment le soleil et tout notre système planétaire, les forces extérieures qui agissent sur ce système, libre dans l'espace, se réduisent aux actions émanant des étoiles fixes. Mais, à cause de leur prodigieux éloignement, ces corps célestes n'exercent sur notre système que des actions très-faibles et probablement négligeables. S'il en est ainsi, le soleil et les planètes constituent donc un système matériel soumis uniquement à l'action de forces intérieures. Quelque compliquées que soient ces actions intérieures; quels que soient les phénomènes physiques, chimiques, qui s'accomplissent dans cet immense groupe de points matériels, ils ne sauraient agir sur le mouvement du centre de gravité du système solaire : celui-ci est donc en repos, ou ne possède qu'un mouvement rectiligne et uniforme.

Évidemment, les conséquences que nous venons de tirer du théorème du mouvement du centre de gravité sont également applicables au théorème de la conservation de la quantité de mouvement. Ainsi, dans le système de points matériels formé par l'ensemble du soleil et des planètes, par suite de l'absence de forces extérieures sensibles, si l'on transporte en un point donné de l'espace les quantités du mouvement qui animent tous les points de ce système à un instant quelconque, leur résultante sera invariable en grandeur et en direction, quel que soit cet instant.

170. — III. *Théorème des moments.* — Reprenons les équations (1) multiplions la troisième par y, la deuxième par z, et retranchons. Il vient

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = (yZ - zY) + (yZ_1 - zY_1).$$

Faisant la somme des équations semblables pour tous les points du système, nous trouvons

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma\,(yZ - zY) + \Sigma\,(yZ_1 - zY_1).$$

Lorsque deux forces sont égales et directement opposées, la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque est égale à zéro : il suffit, pour le voir, de remarquer que si leurs points d'application étaient liés invariablement, ces forces se feraient équilibre. Or, les forces intérieures du système sont deux-à-deux égales et opposées; la somme de leurs moments par rapport à OX est donc nulle, et l'on a $\Sigma\,(yZ_1 - zY_1) = 0$. Raisonnant de même sur les moments relatifs à OY, OZ, on tirera de équations (1) les relations suivantes :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \Sigma\,(yZ - zY),\\ \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \Sigma\,(zX - xZ),\\ \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \Sigma\,(xY - yX),\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles n'entrent plus que les forces extérieures. Mais l'expression

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

représente le moment de la force conservée du point m par rapport à OX; l'axe OX étant une droite quelconque, on a le *Théorème des moments :*

Dans tout système matériel en mouvement, à chaque instant, la somme algébrique des moments des forces conservées de tous les points du système, par rapport à un axe quelconque, est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au même axe.

On peut écrire les équations (6) sous la forme

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\Sigma m\,(yv_z - zv_y) = \Sigma\,(yZ - zY),\\[2mm]
\dfrac{d}{dt}\Sigma m\,(zv_x - xv_z) = \Sigma\,(zX - xZ),\\[2mm]
\dfrac{d}{dt}\Sigma m\,(xv_y - yv_x) = \Sigma\,(xY - yX).
\end{cases}
$$

Concevons encore que l'on fasse au point O la réduction des quantités de mouvement de tous les points du système, comme des forces appliquées à un solide, et soit OK l'axe du couple résultant de ces quantités de mouvement. D'après les formules du n° **85**, ses projections sur OX, OY, OZ, ou les coordonnées du point K, sont respectivement

$$\xi = \Sigma m\,(yv_z - zv_y),\quad \eta = \Sigma m\,(zv_x - xv_z),\quad \zeta = \Sigma m\,(xv_y - yv_x),$$

et les équations (7) deviennent

$$\frac{d\xi}{dt} = \Sigma\,(yZ - zY),\quad \frac{d\eta}{dt} = \Sigma\,(zX - xZ),\quad \frac{d\zeta}{dt} = \Sigma\,(xY - yX).$$

De là résulte évidemment cette autre forme du théorème des moments : *Dans tout système matériel en mouvement, si l'on détermine pour un instant quelconque l'axe* OK *du couple résultant des quantités de mouvement de tous les points du système, et l'axe* OG *du couple résultant des forces extérieures, pour un même centre de réduction fixe* O, *cette seconde droite* OG *représentera en grandeur et en direction la vitesse du point* K, *extrémité de la première* OK.

Sous cette forme, le théorème nous sera utile par la suite.

171. Si la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe OZ est nulle pendant toute la durée du mouvement, de sorte que l'on ait $\Sigma\,(xY - yX) = 0$, la dernière équation (7) donnera

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\,(xv_y - yv_x) = 0,\quad \text{ou}\quad \Sigma m\,(xv_y - yv_x) = \text{const.}$$

Or, l'axe OX est quelconque ; on peut donc dire que, *quand la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe fixe est constamment nulle*, ou, ce qui est la même chose, *quand l'axe du couple résultant des forces extérieures est constamment normal à une droite fixe, la somme des moments des quantités de mouvement de tous les points du*

système, par rapport à cette droite, reste invariable pendant toute la durée du mouvement.

Supposons maintenant qu'il n'y ait pas de forces extérieures ou, plus généralement, que l'axe du couple résultant de ces forces relatif à l'origine O soit nul à chaque instant. Les égalités

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0$$

combinées avec les relations (7), donneront

$$(8) \quad \Sigma m(yv_z - zv_y) = A', \quad \Sigma m(zv_x - xv_z) = B', \quad \Sigma m(xv_y - yv_x) = C',$$

A', B', C' étant des constantes, qui se déterminent immédiatement au moyen des coordonnées et des vitesses initiales des points du système, car on a, par exemple, $A' = \Sigma m[y_0(v_z)_0 - z_0(v_y)_0]$. Les projections de OK sur OX, OY, OZ sont donc des constantes A', B', C'; OK est constant de grandeur et de direction. Donc

Dans un système matériel quelconque, lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, ou lorsque l'axe du couple résultant de ces forces relatif à un centre fixe O est constamment nul, l'axe du couple résultant des quantités de mouvement de tous les points du système, relatif à ce même point O, est constant en grandeur et en direction pendant toute la durée du mouvement.

Ou encore, *la somme des moments des quantités de mouvement du système par rapport à une droite quelconque, menée par le point O, reste invariable.*

C'est ce que l'on nomme le théorème de *la conservation des moments.*

172. — IV. *Théorème des aires.* — Ce théorème est, sous une forme géométrique, la reproduction du précédent. D'après ce qui a été exposé au nº **142**, l'expression.

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = xv_y - yv_x$$

représente le double de la dérivée, par rapport au temps, de l'aire S décrite, dans le plan XY, par la projection du rayon vecteur OM sur ce plan, les aires étant positives lorsque le rayon projeté se meut de OX vers OY, négatives dans le cas contraire. Si donc l'équation

$$\Sigma(xY - yX) = 0$$

a lieu à chaque instant pour les forces extérieures, l'égalité

$$\Sigma m(xv_y - yv_x) = C'$$

qui en résulte (**171**), pourra s'écrire

$$\Sigma m \frac{dS}{dt} = \frac{C'}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} \Sigma m S = \frac{C'}{2}, \quad \text{ou} \quad \Sigma m S = \frac{C't}{2},$$

en supposant les aires S comptées à partir des positions initiales des rayons vecteurs qui les décrivent, de manière à s'annuler avec t. Pour énoncer commodément ce résultat, le produit mS de la masse d'un point M par l'aire que décrit la projection de son rayon vecteur sur le plan XY sera nommé simplement *l'aire projetée sur le plan* XY. Nous dirons donc que

Lorsque la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe fixe passant par l'origine des rayons vecteurs est constamment nulle, la somme des aires projetées sur un plan normal à cet axe, pour tous les points du système, varie proportionnellement au temps; les aires étant toujours considérées comme positives ou négatives, suivant le sens du mouvement des rayons qui les décrivent.

Supposons maintenant que l'on ait toujours

$$\Sigma (yZ - zY) = 0, \quad \Sigma (zX - xZ) = 0, \quad \Sigma (xY - yX) = 0,$$

ce qui a lieu lorsque les forces extérieures n'existent pas, ou plus généralement lorsque le couple résultant de ces forces relatif à l'origine O est nul à chaque instant. La condition ci-dessus se trouvant satisfaite pour tout axe mené par l'origine, on voit que, dans ce cas, *la somme des aires projetées sur un plan fixe quelconque, pour tous les points du système, variera proportionnellement au temps*. Ce qui résulte d'ailleurs des équations (8).

173. Menons, par l'origine O, tous les plans possibles. Sur l'un quelconque de ces plans, la somme des aires projetées, d'après le dernier théorème, sera représentée par une expression de la forme Kt, K désignant une constante qui a nécessairement une valeur finie. Il y a donc, à chaque instant, un de ces plans sur lequel la somme des aires projetées a une valeur plus grande que sur l'un quelconque des autres plans, et puisque t est un facteur commun à toutes les sommes d'aires, ce *plan du maximum des aires* ne peut être que celui pour lequel la constante K a la plus grande valeur. De là il résulte 1° que ce *plan est invariable*, c'est-à-dire que le plan, sur lequel la somme des aires projetées est un

maximum à un instant donné, jouit de cette propriété dans toute la suite du temps ; 2° les équations

$$\Sigma m\,S = \frac{C'}{2} t, \quad \Sigma m\,(xv_y - yv_x) = C',$$

nous montrent que la constante K, qui multiplie t dans l'expression de la somme des aires projetées sur un plan quelconque, vaut la moitié de celle qui mesure la projection de l'axe OK du couple résultant des quantités de mouvement sur la normale à ce plan. Le plan pour lequel K a la plus grande valeur est donc normal à la droite, menée par l'origine O, sur laquelle l'axe OK donne la projection maximum, c'est-à-dire à cet axe lui-même. D'où résulte ce théorème, dit *théorème du plan invariable :*

Lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures ou lorsque l'axe du couple résultant de ces forces, relatif à une origine O, *est constamment nul, le plan sur lequel la somme des aires projetées, à chaque instant, a la plus grande valeur, est un plan invariable, normal à l'axe du couple résultant des quantités de mouvement de tous les points du système.*

Si donc p, q, r sont les angles directeurs de la perpendiculaire au plan invariable menée par le point O, on aura

$$\frac{\cos p}{A'} = \frac{\cos q}{B'} = \frac{\cos r}{C'} = \pm \frac{1}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

ce qui détermine immédiatement la direction de ce plan au moyen des données initiales, d'après la remarque faite plus haut.

171. Les théorèmes des moments et des aires donnent lieu, comme celui du centre de gravité, à des applications nombreuses et remarquables. Nous voyons que dans le mouvement d'un système matériel quelconque les forces intérieures, quelles qu'elles soient, n'ont aucune influence sur la grandeur et la direction de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement de tous les points du système : seules, les forces extérieures font varier cet axe.

Dans le mouvement d'un projectile explosif, les forces extérieures se réduisent à la pesanteur, si l'on néglige le frottement de l'air ; la somme des moments de ces forces par rapport à une verticale quelconque est donc nulle, et par conséquent la somme des aires projetées sur un plan horizontal varie proportionnellement au temps. Lorsque le projectile éclate, comme les forces qui agissent à cet instant ne sont que des forces

intérieures, il s'ensuit que l'explosion ne trouble pas la valeur du rapport entre la somme des aires projetées et le temps.

Un homme isolé dans l'espace ne saurait, quelques efforts qu'il fasse, imprimer à son corps un mouvement de rotation autour d'une droite, de la verticale, par exemple; car la somme des moments des quantités de mouvement de tous les points qui composent le corps étant nulle, par rapport à cette droite, dans l'état de repos, doit rester nulle tant qu'il n'intervient pas de forces extérieures, et les actions qui provoquent les mouvements musculaires sont purement intérieures. Il s'ensuit que la somme des aires projetées sur un plan horizontal reste nulle, ce qui n'aurait pas lieu si le corps tout entier tournait autour de la verticale.

Enfin, considérant encore notre système solaire comme un système libre de points matériels et négligeant les actions des corps célestes en dehors de ce système, on devra conclure que l'axe du couple résultant des quantités de mouvement de tous les points de ce système, relatif à un point fixe O dans l'espace, est constant en grandeur et en direction, quels que soient les chocs, les actions moléculaires, les réactions chimiques qui se produisent incessamment entre tous les points de ce vaste système; et si l'on mène par le point O un plan fixe, la somme des aires projetées sur ce plan, étendue à tous les points, variera proportionnellement au temps.

175. Il importe de remarquer que le théorème des moments et ses conséquences subsistent lorsque, au lieu de rapporter le mouvement du système matériel à des axes fixes, on le rapporte à des axes mobiles parallèlement à eux-mêmes et passant constamment par le centre de gravité G du système considéré. En effet, soient $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ trois axes restangulaires, emportés dans un mouvement de translation avec le centre G; soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point M du système matériel par rapport à ces axes, en sorte que

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation (6), nous trouverons

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma m\left[(y_1 + \eta)\left(\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) - (z_1 + \zeta)\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\right)\right].$$

Faisons sortir du signe Σ les facteurs renfermant y_1, z_1 et leurs déri-

vées, facteurs qui sont les mêmes quel que soit le point x, y, z. Nous aurons

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)\Sigma m+y_1\Sigma m\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$
$$-z_1\Sigma m\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{d^2z_1}{dt^2}\Sigma m\eta-\frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma m\zeta+\Sigma m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right).$$

Or Σm est égal à M ; de plus, l'origine G des coordonnées ξ, η, ζ étant le centre de gravité du système, on a constamment

$$\Sigma m\eta = 0,\quad \Sigma m\zeta = 0,$$

et par suite

$$\Sigma m\frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\quad \Sigma m\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0.$$

L'équation se réduit donc à

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\mathrm{M}\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)+\Sigma m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)$$

D'un autre côté, nous avons

$$\Sigma(y\mathrm{Z}-z\mathrm{Y})=y_1\,\Sigma\mathrm{Z}-z_1\,\Sigma\mathrm{Y}+\Sigma(\eta\mathrm{Z}-\zeta\mathrm{Y});$$

substituant dans la première équation (6), et observant encore que le théorème du mouvement du centre de gravité nous donne

$$\mathrm{M}\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma\mathrm{Y},\quad \mathrm{M}\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma\mathrm{Z},$$

nous aurons, toute réduction faite,

$$\Sigma m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)=\Sigma(\eta\mathrm{Z}-\zeta\mathrm{Y}).$$

Cette équation ne diffère de la première équation (6) que par la substitution des coordonnées η, ζ, à y, z, c'est-à-dire des positions et des accélérations relatives aux positions et aux accélérations absolues ; et la même chose aura lieu, évidemment, pour les deux autres équations qui expriment le théorème des moments. On en déduit nécessairement la conséquence énoncée plus haut. Le théorème des aires subsiste également dans le mouvement relatif du système autour de son centre de gravité.

Comme application, considérons le mouvement de la terre, rapporté à trois axes passant par son centre de gravité et animés d'une simple trans-

lation. Ce mouvement se réduit sensiblement à une rotation uniforme autour de l'axe des pôles. La somme des aires projetées sur un plan normal à cet axe, dans un intervalle de temps donné, est constante. Si la terre se contracte par suite du refroidissement, les distances de ses points au centre diminuent, et la somme des aires projetées dans un temps donné diminuerait évidemment si la vitesse de rotation restait la même. Or, c'est ce qui ne peut avoir lieu, la résultante des forces extérieures passant à peu près par le centre de gravité de la masse terrestre. Le mouvement de rotation s'accélérera donc, et la durée du jour en sera diminuée.

CHAPITRE XXV.

(*Suite*). THÉORÈME DES FORCES VIVES.

176. Nous avons démontré (**144**) que dans le mouvement d'un point matériel libre M, l'accroissement de la demi-force vive du point pendant un temps infiniment petit est égal à la somme des travaux élémentaires des forces qui sollicitent le mobile. Si, dans un système matériel quelconque, nous considérons chacun des points et toutes les forces intérieures et extérieures qui le sollicitent, la même égalité aura lieu. Faisant la somme des équations semblables pour tous les points du système et désignant par P l'une quelconque des forces intérieures ou extérieures, par X, Y, Z ses composantes rectangulaires, nous aurons

$$\Sigma\ d.\frac{mv^2}{2} = \Sigma P ds \cos(P, v),$$

ou encore

$$(1) \qquad \frac{1}{2} d.\ \Sigma mv^2 = \Sigma(X dx + Y dy + Z dz),$$

le signe Σ s'étendant, dans le premier membre, à tous les points; dans le second, à toutes les forces. Intégrons les deux membres depuis une époque t_0 jusqu'à une époque t, et soit v_0 la vitesse du point M pour $t = t_0$. Il viendra

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma\int_{t_0}^{t}(X dx + Y dy + Z dz).$$

Pour abréger, nous indiquerons par la notation $\mathfrak{T}$P le travail total d'une

force P pendant le temps compris entre t_0 et t, et nous écrirons l'équation (2) comme il suit :

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{T}P.$$

On appelle *force vive totale* d'un système matériel la somme des forces vives de tous ses points à l'instant considéré. D'après l'équation (3), *la variation de la demi-force vive totale d'un système matériel quelconque pendant un temps donné est égale à la somme des travaux des forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur les différents points du système pendant ce temps.*

C'est le *théorème des forces vives*. On se rappellera, dans l'application de ce théorème, que lorsque certains points du système sont assujettis à se mouvoir sur des courbes ou surfaces fixes sans frottement, les réactions normales qui en résultent ne développent aucun travail.

177. Supposons qu'il existe une fonction des forces, dont les dérivées partielles par rapport aux coordonnées x, y, z d'un point quelconque du système donnent précisément les composantes X, Y, Z de la force appliquée à ce point. Nous aurons, $\psi(x, y, z, x', \ldots)$ désignant cette fonction

$$\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = d.\psi(x, y, z, x', \ldots),$$

et l'équation (1) admettra par conséquent l'intégrale suivante :

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \psi(x, y, z, x', \ldots) - \psi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots).$$

Cette équation se nomme l'*intégrale des forces vives*. Elle fait connaître l'accroissement de la force vive totale du système dans un temps donné par les positions des points du système au commencement et à la fin de cet intervalle de temps.

Supposons, comme cas particulier, que tous les points d'un système en mouvement soient soumis à la pesanteur. L'axe des z étant vertical dans le sens de la pesanteur, le travail élémentaire de la force appliquée à un point de masse m est $mgdz$. Or, nous avons

$$\Sigma\, mgdz = gd.\Sigma mz = gd.\mathrm{M}z_1 = \mathrm{M}gdz_1,$$

z_1 se rapportant au centre de gravité du système. En intégrant entre deux valeurs t_0 et t du temps, on trouve

$$\mathrm{M}g\,[-z_1\,(z_1)_0],$$

d'où ce théorème dont on fait un usage fréquent : *Le travail total de*

la pesanteur sur un système matériel animé d'un mouvement quelconque, dans un temps donné, s'obtient en multipliant le poids du système par la quantité dont s'abaisse son centre de gravité pendant ce temps.

La fonction des forces est ici $-g\,\Sigma mz$.

178. Nous distinguerons, dans ce qui suit, le travail des forces intérieures de celui des forces extérieures. Soit F_i l'une quelconque des premières; F_e l'une des autres. L'équation (3) devient

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{T} F_i + \Sigma \mathfrak{T} F_e.$$

Le travail des forces intérieures admet une expression remarquable, si l'on observe que les actions réciproques de deux points matériels sont égales et opposées, et si l'on admet, suivant une loi que les progrès de la physique tendent à confirmer, qu'elles sont toujours mesurées par le produit des masses m et m' par une certaine fonction $f(r)$ de leur distance mutuelle r; fonction que nous regarderons comme positive dans le cas d'une *attraction*, comme négative dans le cas d'une *répulsion*. L'action de m sur m' ou de m' sur m sera donc égale à $mm'f(r)$, et nous avons vu (**149**) que la somme des travaux élémentaires de ces actions réciproques a pour expression $-mm'f(r)\,dr$, ou encore, si l'on pose comme nous l'avons déjà fait

$$\varphi(r) = \int f(r)\,dr,$$

$-mm'd.\varphi(r) = d[-mm'\varphi(r)]$. Indiquons par S une somme qui s'étend à tous les couples de points pris deux-à-deux, et, remarquant que la distance r de deux points est une fonction connue des coordonnées x, y, z, x', y', z' de ces points, posons

$$Smm'\varphi(r) = \Pi(x, y, z, x', \ldots).$$

Il est clair que la somme des travaux élémentaires des forces intérieures aura pour expression

$$S\,d[-mm'\varphi(r)] = -d.\,Smm'\varphi(r) = -d.\Pi(x, y, z, x', \ldots),$$

et par conséquent, que

$$\Sigma \mathfrak{T} F_i = -\Pi(x, y, z, x', \ldots) + \Pi(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots) = \Pi_0 - \Pi,$$

Π_0 et Π désignant simplement les valeurs de la fonction Π aux époques t_0 et t. L'équation des forces vives prendra donc la forme

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Pi_0 - \Pi + \Sigma \mathfrak{T} F_e.$$

Il importe d'observer que $\Pi = Smm'\varphi(r)$ dépend uniquement des distances r comprises entre les points du système. Donc 1° cette fonction ne varie pas, lorsque les distances r restent constantes, comme cela a lieu, par exemple, dans un solide animé d'un mouvement quelconque; 2° cette fonction repasse par la même valeur, chaque fois que les points du système reprennent les mêmes positions les uns par rapport aux autres, comme cela a lieu périodiquement dans un corps élastique qui oscille autour de sa position d'équilibre; 3° en général, quand un système se meut en se déformant, comme un liquide, un gaz, un système composé de solides articulés, de cordes, etc., s'il est des portions du système qui se meuvent sans que les distances mutuelles de leurs points varient, les termes de la fonction Π qui se rapportent à ces couples de points peuvent être négligés, leur variation étant toujours nulle dans un intervalle de temps quelconque.

179. Ces remarques donnent lieu à d'importantes conséquences. Considérons un solide animé d'un mouvement quelconque et soumis à l'action de forces extérieures, appliquons-lui l'équation (5) en tenant compte de ce qui précède; nous aurons

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{T} F_e,$$

c'est-à-dire que *la variation de la demi-force vive totale d'un solide pendant un temps donné est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant ce temps*. Et en particulier, *si aucune force extérieure n'agit sur un solide en mouvement, sa force vive totale reste constante*.

Soit un système matériel qui varie de forme pendant son mouvement, mais en repassant périodiquement par la même figure, de sorte que tous ses points reprennent les mêmes positions relatives après des intervalles de temps constants ou même variables.

Dans l'équation (5), $\Pi - \Pi_0$ sera nul si l'on prend pour t_0 et t les époques correspondantes au commencement et à la fin d'un de ces intervalles, et l'équation (6) aura encore lieu. Donc

Quand un système matériel quelconque en mouvement reprend la même figure après des intervalles de temps déterminés, la variation de la demi-force vive totale pendant un de ces intervalles est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant le même temps.

Ce théorème s'applique, entr'autres, au mouvement d'une machine à

vapeur, d'une scierie, etc. Et s'il n'y a pas de forces extérieures ou que le travail de ces forces soit nul, *la force vive totale reprend la même valeur chaque fois que le système revient à la même figure*. Cela a lieu, par exemple, dans une lame élastique qui vibre, étant encastrée fixément par une de ses extrémités.

180. Le théorème renfermé dans l'équation (5) s'énonce sous une forme nouvelle au moyen de la terminologie introduite par M. Rankine. Nommons *énergie actuelle* d'un système la demi-somme T des forces vives de tous ses points à un instant donné; *énergie potentielle* cette quantité Π dont la différentielle changée de signe mesure la somme des travaux élémentaires des forces intérieures. Mais comme la fonction $\varphi(r)$, définie par une intégration (**178**), comporte nécessairement une constante arbitraire, et qu'il en est de même de la fonction $\Pi = \Sigma mm'\varphi(r)$, nous supposons que cette constante soit déterminée par une condition qui sera précisée plus loin, et c'est à la fonction Π, ainsi complétement déterminée, que s'appliquera le nom d'énergie potentielle. Enfin, l'*énergie totale* d'un système sera la somme de son énergie actuelle et de son énergie potentielle. L'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + \Pi\right) - \left(\frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + \Pi_0\right) = \Sigma \mathfrak{T} F_e,$$

ou

$$(7) \qquad (T + \Pi) - (T_0 + \Pi_0) = \Sigma \mathfrak{T} F_e;$$

donc, *dans tout système de points matériels en mouvement, la variation de l'énergie totale pendant un temps donné est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant le même temps*.

Supposons qu'aucune force extérieure n'agisse sur le système considéré. Le second membre de l'équation (7) est nul, donc

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0,$$

et comme le second membre est ici indépendant de t, le premier est aussi constant. Donc, *l'énergie totale d'un système matériel soustrait à l'action de toute force extérieure, est invariable*.

L'énergie actuelle et l'énergie potentielle sont donc complémentaires l'une de l'autre, dans ce cas : quand l'une augmente, l'autre diminue, et *vice-versâ*. Considérons la lame vibrante du N° précédent. Lorsqu'elle est le plus éloignée de sa position d'équilibre, sa vitesse est nulle, $T = 0$: son énergie potentielle est donc alors la plus grande possible. Au con-

traire, à l'instant où la lame passe par sa position d'équilibre, tous ses points sont animés de leurs plus grandes vitesses, T est maximum ; donc Π est alors le plus petit possible.

Si nous regardons l'ensemble de l'univers créé comme un système de points matériels soumis exclusivement à leurs actions réciproques et soustraits à toute action extérieure, le théorème précédent lui est applicable. Ainsi *l'énergie totale de l'univers reste constante.*

181. Dans les applications que l'on doit faire du théorème des forces vives ou de l'énergie, il est essentiel de tenir compte de tous les mouvements dont la matière est animée, aussi bien de ceux qui échappent à nos mesures directes que des autres. Telles sont les vibrations de l'éther qui transmettent la lumière et la chaleur, les vibrations calorifiques imprimées aux molécules des corps par le frottement ou la radiation, etc. Ainsi nous avons dit que, quand les points du système partent d'une certaine position et y reviennent, le travail des forces intérieures correspondant à la période intermédiaire est nul; mais il ne faut pas conclure de là que l'on puisse négliger l'effet du frottement dans l'équation des forces vives appliquée à une machine. Car les actions intérieures qui causent le frottement déterminent, dans les pièces en contact, des vibrations moléculaires que nous percevons sous forme de *chaleur*, et l'énergie actuelle invisible correspondante à ces vibrations est une partie de la force vive totale du système ; de plus, par suite de la dilatation produite par l'échauffement, les molécules s'écartent les unes des autres, d'où il résulte une certaine variation de l'énergie potentielle.

De même, dans une machine à vapeur, les positions et les vitesses des points se retrouvant sensiblement les mêmes à la fin de chaque période du mouvement de la machine, on devrait en conclure que, l'énergie totale reprenant la même valeur, le travail des forces extérieures (réactions des appareils mus par la machine) est nul pendant une période, ce qui est évidemment faux. C'est que l'on a négligé l'énergie actuelle calorifique dépensée par le foyer : la quantité de force vive qui a ainsi disparu correspond au travail négatif des forces extérieures.

Mais l'étude complète des applications du théorème des forces vives à ce point de vue appartient à la *thermodynamique*.

182. Le théorème des forces vives permet d'établir une proposition fort importante, due à Dirichlet, sur la stabilité de l'équilibre d'un système : *Lorsque les forces qui sollicitent un système sont telles qu'il existe*

une fonction des forces $\psi(x, y, z, x', \ldots)$ *et que, pour une position déterminée du système, cette fonction est un maximum, la position dont il s'agit est une position d'équilibre stable.* C'est-à-dire que si l'on écarte très-peu les points du système de leurs positions correspondantes aux maximum de la fonction ψ, et si on les abandonne à eux-mêmes avec des vitesses très-petites ou nulles, ils s'écarteront toujours très-peu de leurs positions d'équilibre.

Soient $a, b, c, a', \ldots$ les valeurs des variables $x, y, z, x', \ldots$ correspondantes à cette position; $\xi, \eta, \zeta, \xi', \ldots$ les composantes des déplacements des points relativement à cette position, à l'époque t; $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi'_0, \ldots$ ces composantes à l'époque $t = 0$; en sorte que

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta, \quad z = c + \zeta, \ldots,$$

$$x_0 = a + \xi_0, \quad y_0 = b + \eta_0, \quad z_0 = c + \zeta_0, \ldots$$

Soit Θ une nouvelle fonction des forces, telle que

$$\Theta(x, y, z, x', \ldots) = \psi(x, y, z, x', \ldots) - \psi(a, b, c, a', \ldots).$$

On a donc $\Theta(a, b, c, a' \ldots) = 0$. L'équation (4) peut évidemment s'écrire

$$T - T_0 = \Theta(x, y, z, x', \ldots) - \Theta(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots),$$

ou simplement

$$(8) \qquad T = \Theta + (T_0 - \Theta_0).$$

Par hypothèse, ψ est un maximum pour $x = a$, $y = b, \ldots$, ou pour $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0, \ldots$, et il en est de même de Θ qui ne diffère de ψ que par une constante; ce maximum de Θ étant zéro, il s'ensuit que pour des valeurs suffisamment petites de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ la valeur de la fonction Θ sera constamment négative. L'équation (8) montre d'abord que cette position où Θ est un maximum est bien une position d'équilibre; car si l'on suppose $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \ldots$ nuls ainsi que les vitesses initiales, T_0 est nul ainsi que $\Theta_0 = \Theta(a, b, c, \ldots)$, et l'on a $T = \Theta$. Or, si $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ cessaient un instant d'être nuls, Θ devenant négatif comme on vient de le voir, T serait négatif, ce qui est absurde. Désignons maintenant par $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \ldots$ des quantités positives très-petites, telles que, pour toutes les valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \xi', \ldots$ numériquement égales ou inférieures à $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \ldots$ respectivement, la fonction Θ soit constamment négative. Soit, d'autre part, A la plus petite valeur absolue que puisse affecter Θ lorsque les variables $\xi, \eta, \zeta, \xi', \ldots$ sont numériquement inférieures à

leurs limites respectives λ, μ, ν, λ',..., sauf une ou plusieurs d'entr'elles qui leur seraient égales.

On peut déterminer les valeurs $\xi_0, \eta_0, \zeta_0,\ldots$ des déplacements qui répondent à l'instant initial, de telle sorte 1° que Θ_0 soit négatif, puisqu'il suffit pour cela que les valeurs absolues de $\xi_0, \eta_0,\ldots$ soient numériquement moindres que $\lambda, \mu,\ldots$; 2° que l'on ait

$$T_0 - \Theta_0 < A,$$

puisque T_0, ou la demi-somme des forces vives initiales, sera rendu aussi petit qu'on voudra en imprimant des vitesses initiales assez petites, et d'autre part Θ_0, qui s'évanouirait en même temps que $\xi_0, \eta_0, \zeta_0,\ldots$, différera de zéro aussi peu qu'on voudra en prenant ces quantités suffisamment petites.

Cela admis, nous disons que ξ, η, ζ, ξ', .. resteront toujours respectivement moindres, en valeur absolue, que λ, μ, ν, λ',... Car supposons qu'une ou plusieurs de ces variables viennent à dépasser leurs limites respectives : comme elles varient d'une manière continue, il y a eu nécessairement un instant où l'une au moins des quantités ξ, η, ζ,... avait atteint sa limite, les autres étant encore inférieures aux leurs. A cet instant, donc, d'après la signification attribuée à la quantité A, Θ serait égal ou supérieur à A en valeur absolue; le second membre de l'équation (8) se composerait de deux termes : l'un, Θ, négatif et au moins égal à A; l'autre, $T_0 - \Theta_0$, positif et moindre que A par l'hypothèse. Ce second membre serait donc négatif, ce qui est impossible, T, ou l'énergie actuelle, étant essentiellement positif.

Les quantités λ, μ, ν,... pouvant être prises aussi petites qu'on le veut, les valeurs de $\xi, \eta, \zeta,\ldots$ resteront donc toujours très-petites, et les valeurs de x, y, z,... différeront toujours très-peu de a, b, c,..., ce qui démontre la proposition.

Par exemple, un solide pesant fixé par un point est en équilibre dans deux cas, lorsque le centre de gravité se trouve sur la verticale du point fixe, au-dessus ou au-dessous de ce point. Mais pour que l'équilibre soit stable, il faut que la fonction des forces $-gMz_1$ (**177**) soit maximum, ou que z_1 ait la plus petite valeur possible : l'équilibre est donc stable quand le centre de gravité occupe la position la plus basse possible.

183. Appliquons le théorème de Dirichlet aux forces intérieures qui

existent dans un système matériel quelconque, et nous aurons une définition plus nette de l'énergie potentielle du système. Parmi toutes les positions que peuvent prendre les points du système, il en existe nécessairement une pour laquelle la fonction $\Pi = Smm'\varphi(r)$ acquiert la plus petite valeur possible, et comme la fonction des forces intérieures n'est autre que $-\Pi$ (**178**), la position dont il s'agit répond à un maximum de la fonction des forces : c'est donc une position d'équilibre stable s'il n'y a pas de forces extérieures. Concevons que l'on dispose de la constante arbitraire qui affecte la fonction Π, de manière que cette fonction s'annule précisément quand les points du système occupent leurs positions d'équilibre stable : elle sera donc *positive* pour toute autre position du système. Si maintenant nous admettons que le système parte, à une époque t_0, de la position d'équilibre stable et arrive à l'époque t à une position donnée quelconque, le travail des forces intérieures dans ce mouvement sera, Π_0 étant nul,

$$\Sigma \mathfrak{T} F_i = -\Pi(x, y, z, \ldots).$$

Donc, *la fonction* Π *ou l'énergie potentielle correspondante à une position quelconque du système matériel représente le travail positif que développeraient les forces intérieures, si le système passait de la position considérée à la position d'équilibre stable pour laquelle cette fonction* Π *est un minimum.*

184. Le théorème des forces vives s'applique aussi au mouvement relatif d'un système par rapport à trois axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, ayant pour origine le centre de gravité G et mobiles parallèlement à eux-mêmes.

Décomposons d'abord la force vive totale en deux parties. Si u désigne la vitesse du centre de gravité ; x_1, y_1, z_1 ses coordonnées rapportées aux axes fixes, les équations

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta$$

du N° **175** donnent, v' étant la vitesse relative d'un point M du système par rapport à $G\xi\eta\zeta$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{d\xi}{dt}, \quad \text{ou} \quad v_x = u_x + v'_\xi, \text{ etc.}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}\Sigma mv^2 = \Sigma m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) &= \Sigma m\left[(u_x + v'_\xi)^2 + (u_y + v'_\eta)^2 + (u_z + v'_\zeta)^2\right] \\ &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,\Sigma m + 2u_x\,\Sigma mv'_\xi + 2u_y\,\Sigma mv'_\eta + 2u_z\,\Sigma mv'_\zeta \\ &\quad + \Sigma m\,(v'^2_\xi + v'^2_\eta + v'^2_\zeta).\end{aligned}$$

Mais, l'origine des axes mobiles étant au centre de gravité, nous avons

$$\Sigma m\xi = 0, \quad \text{d'où} \quad \Sigma m\frac{d\xi}{dt} = \Sigma m v'_\xi = 0$$

et de même pour les autres axes. L'égalité ci-dessus se réduit donc à

$$(9) \qquad \Sigma mv^2 = Mu^2 + \Sigma mv'^2;$$

c'est-à-dire que *la force vive totale d'un système matériel quelconque est la somme de la force vive de son centre de gravité où l'on supposerait toute la masse réunie, et de la force vive totale dont le système est animé dans son mouvement relatif par rapport à son centre de gravité.*

185. Evaluons maintenant le travail des forces dans le mouvement absolu et relatif. Considérons une force quelconque P dont les composantes parallèles à OX, OY, OZ sont X, Y, Z. Nous avons

$$Xdx + Ydy + Zdz = X(dx_1 + d\xi) + Y(dy_1 + d\eta) + Z(dz_1 + d\zeta);$$

donc, pour toutes les forces intérieures ou extérieures,

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = dx_1\Sigma X + dy_1\Sigma Y + dz_1\Sigma Z + \Sigma(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta).$$

Mais le mouvement du centre de gravité est, d'après le théorème du N° **167**, celui d'un point libre de masse M soumis à l'action d'une force dont les composantes sont ΣX, ΣY, ΣZ. Appliquant l'équation de la force vive à ce mouvement, on a donc

$$\frac{1}{2}d.Mu^2 = dx_1\Sigma X + dy_1\Sigma Y + dz_1\Sigma Z,$$

et l'équation ci-dessus devient

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{1}{2}d.Mu^2 + \Sigma(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta).$$

Substituons dans l'équation (1) relative au travail élémentaire, la valeur de Σmv^2 donnée par (9) et la somme des travaux des forces que nous venons d'obtenir. Nous aurons, réduction faite,

$$\frac{1}{2}d.\Sigma mv'^2 = \Sigma(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta).$$

Or, cette équation ne diffère de l'équation (1) que par la substitution de ξ, η, ζ, v' à x, y, z, v, c'est-à-dire que la force vive du système et le travail des forces sont maintenant évalués, non plus dans le mouvement absolu du système, mais dans son mouvement relatif par rapport aux axes Gξ, Gη, Gζ. Donc, en intégrant les deux membres de l'équation

depuis t_0 jusqu'à t, on en déduira le théorème suivant : *L'équation des forces vives subsiste complètement, lorsqu'au lieu d'évaluer la force vive du système et le travail des forces dans le mouvement absolu du système, on les évalue dans son mouvement relatif autour de son centre de gravité.*

Observons d'ailleurs que le travail des forces intérieures pendant le temps $t - t_0$ étant mesuré par $\Pi_0 - \Pi$, comme on l'a vu (**178**), et la fonction Π renfermant seulement les distances réciproques des points du système, ce travail ne dépend nullement du système d'axes coordonnés auquel on rapporte les points mobiles. *Le travail des forces intérieures est donc le même dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif.*

On appelle *énergie totale intérieure du système* la somme de son énergie actuelle évaluée par rapport au centre de gravité, ou $\frac{1}{2}\Sigma mv'^2$, et de son énergie potentielle qui, d'après la remarque que nous venons de faire, est indépendante des axes fixes ou mobiles auquels on rapporte le système. Le théorème des forces vives s'appliquant au mouvement relatif du système par rapport à son centre de gravité, il en est de même du théorème de l'énergie qui est une conséquence du premier. Ainsi

La variation de l'énergie totale intérieure d'un système matériel quelconque pendant un temps donnée est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant ce temps, évalués dans le mouvement relatif du système autour de son centre de gravité.

Et s'il n'y a pas de forces extérieures appliquées au système, *son énergie totale intérieure demeure constante.*

Ces propriétés sont d'une haute importance dans la thermodynamique.

Exercices sur les deux chapitres précédents.

1. Deux points M, M', placés respectivement en A et B à l'état de repos, s'attirent proportionnellement à leurs masses m, m' et à leur distance MM'. Déterminer leur mouvement.

R. Origine A; $AB = a$, $AM = x$, $AM' = x'$. D'après le principe du centre de gravité, on a

$$(\alpha) \qquad mx + m'x' = m'a.$$

D'ailleurs, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m'(x' - x), \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = -m(x' - x), \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2(x' - x)}{dt^2} = -(m + m')(x' - x).$$

Intégrant et combinant avec (α), on trouve

$$x = \frac{m'a\,(1 - \cos t\sqrt{m+m'})}{m+m'}, \quad x' = \frac{m'a + ma\cos t\sqrt{m+m'}}{m+m'}.$$

2. Trois masses m_1, m_2, m_3, liées invariablement, sont soumises, dans la direction des z positifs, à la pesanteur; dans la direction des x positifs, à une force accélératrice proportionnelle au temps, μt. Déterminer les coordonnées x_1, y_1, z_1 et la vitesse u du centre de gravité de ces trois masses à un instant quelconque, ainsi que sa trajectoire.

Les coordonnées initiales (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) des masses m_1, m_2, m_3 sont données; leurs vitesses initiales sont nulles.

R. Posons

$$\alpha = \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \beta = \frac{m_1b_1 + m_2b_2 + m_3b_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \gamma = \frac{m_1c_1 + m_2c_2 + m_3c_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

nous trouverons

$$x_1 = \alpha + \frac{\mu t^3}{6}, \quad y_1 = \beta, \quad z_1 = \gamma + \frac{gt^2}{2}, \quad u = \frac{t}{2}\sqrt{4g^2 + \mu^2 t^2},$$

$$z_1 = \gamma - \frac{g}{2}\left[\frac{6}{\mu}(x_1 - \alpha)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

3. *Machine d'Atwood.* — Deux masses pesantes M, M′ (M > M′) sont réunies par un fil sans masse passant sur une roue mobile autour d'un axe horizontal O. Déterminer le mouvement du système.

R. Soient a le rayon de la roue, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire de la rotation, prise positive dans le sens où agit le poids M. La somme des moments des quantités de mouvement du système par rapport à l'axe O est égale à $\omega\,[\mathrm{H} + (\mathrm{M} + \mathrm{M}')\,a^2]$, H désignant la somme $\sum mr^2$ des masses des points de la roue multipliées par les carrés leurs distances à l'axe. La somme des moments des forces extérieures par rapport à cet axe est $(\mathrm{M} - \mathrm{M}')\,ga$; le théorème des moments (170) donne l'équation

$$[\mathrm{H} + (\mathrm{M} + \mathrm{M}')\,a^2]\frac{d\omega}{dt} = (\mathrm{M} - \mathrm{M}')\,ga, \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{(\mathrm{M} - \mathrm{M}')\,gat}{\mathrm{H} + (\mathrm{M} + \mathrm{M}')\,a^2}.$$

La vitesse de la roue est donc, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant moindre que M — M′ est plus petit, que H et M + M′ sont plus grands.

4. Un treuil est mis en mouvement par une masse pesante M suspendue à un fil enroulé sur l'arbre; la vitesse de rotation est modérée par un système d'ailettes implantées sur la surface du treuil. Trouver la loi de la rotation, la résistance de l'air sur les ailettes étant proportionnelle au carré de la vitesse angulaire.

R. a le rayon de l'arbre, H la quantité $\sum mr^2$ étendue à tous les points de l'arbre et des ailettes; $k\omega^2$ l'expression du moment, par rapport à l'axe du treuil, de la résistance de l'air contre les ailettes. Le théorème des moments donnera, comme dans l'exemple précédent,

$$(\mathrm{H} + \mathrm{M}a^2)\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{M}ga - k\omega^2, \quad \text{ou} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{M}ga\,(1 - \alpha^2\omega^2)}{\mathrm{H} + \mathrm{M}a^2},$$

en posant $k = Mg\alpha\varkappa^2$. Cette équation, semblable à celle qui détermine la vitesse d'un point pesant dans un milieu résistant (**127**), se traite de même et les conséquences sont semblables. Discuter.

5. Une droite rigide, dont la masse est insensible, tourne autour d'un de ses points O dans un plan horizontal ; une masse m peut glisser sans frottement sur la droite ; une masse m' est fixée sur la droite, en un point A, de l'autre côté du point fixe. Le mouvement de rotation de la droite est donné ; trouver l'équation différentielle de la trajectoire du point m.

R. Soient $Om' = a$; r, θ les coordonnées polaires de m ; θ est une fonction donnée de t. Le théorème des aires et celui des forces vives donnent

$$(mr^2 + m'a^2)\frac{d\theta}{dt} = k, \quad m\frac{dr^2}{dt^2} + (mr^2 + m'a^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} = h,$$

k, h étant des constantes faciles à déterminer par les données initiales. Éliminant dt, on a pour l'équation demandée

$$m\frac{dr^2}{d\theta^2} + (mr^2 + m'a^2) - \frac{h}{k^2}(mr^2 + m'a^2)^2 = 0.$$

6. Un solide de masse M peut glisser sans frottement par sa face inférieure sur un plan horizontal. Un plan vertical, passant par le centre de gravité G du solide, coupe sa surface supérieure suivant une courbe connue ABC, et un point pesant de masse m se meut librement sur cette courbe. Déterminer le mouvement du point m et celui qui en résulte pour le solide, la vitesse initiale étant nulle.

R. Soient, dans le plan vertical ABC, deux axes $G\xi$, $G\eta$, horizontal et vertical, passant par le centre de gravité ; ξ, η les coordonnées du mobile m par rapport à ces axes, $\xi = \varphi(\eta)$ l'équation de la courbe ABC ; x_1, y_1 les coordonnées de G par rapport à deux axes fixes parallèles aux précédents (y_1 est constant par l'hypothèse). — Le théorème du centre de gravité fournit l'équation

$$(M + m)x_1 + m\xi = \text{const.} = a, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{m}{M + m}\frac{d\xi}{dt}.$$

Le travail des forces intérieures étant nul, l'équation des forces vives donne, par l'équation précédente,

$$\frac{M}{M + m}\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} = 2g(\eta_0 - \eta), \quad \text{d'où} \quad dt = \pm\frac{d\eta\sqrt{M + m + M\varphi'(\eta)^2}}{\sqrt{2g(M + m)(\eta_0 - \eta)}}.$$

On a, par quadrature, t en fonction de η ; par suite η, ξ et x_1 en fonction de t. Si ABC est une droite $\xi = \alpha\eta + \beta$, et que l'on pose

$$k\sqrt{2g(M + m)} = \sqrt{M + m + M\alpha^2},$$

on aura

$$\eta = \eta_0 - \frac{t^2}{4k^2}, \quad \xi = \alpha\eta_0 + \beta - \frac{\alpha t^2}{4k^2}, \quad x_1 = \frac{1}{M + m}\left(a - m\alpha\eta_0 - m\beta + \frac{m\alpha t^2}{4k^2}\right).$$

7. Déterminer le mouvement d'une baguette rectiligne, homogène et pesante AB, dont les extrémités s'appuient sans frottement sur deux glissières, l'une horizontale OX, l'autre verticale OY. Calculer les pressions ϖ et ϖ' exercées en A sur OX, en B sur OY. La vitesse initiale est nulle.

R. Soient $AB = 2a$, Mg le poids de la barre, appliqué en son milieu G ; θ l'angle OAB de la baguette avec l'horizontale. Le théorème des forces vives donne, le travail des réactions normales ϖ et ϖ' étant nul,

$$\sum mv^2 = 2\, Mga\,(\sin\theta_0 - \sin\theta).$$

Pour calculer $\sum mv^2$, on observe qu'un point M situé à la distance z de l'extrémité A a pour coordonnées $x = (2a - z)\cos\theta$, $y = z\sin\theta$; que la densité linéaire ρ de la baguette est $M : 2a$; on a, calcul fait,

$$\sum mv^2 = \int_0^{2a} \rho v^2 dz = \frac{4}{3} Ma^2 \frac{d\theta^2}{dt^2},$$

d'où enfin

$$(\beta) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{3g}{2a}(\sin\theta_0 - \sin\theta).$$

Cette équation détermine θ en fonction de t, ce qui fait connaître tout le mouvement de la barre. Si l'on pose $\zeta = 90° + \theta$, on retombe sur l'équation du pendule simple, d'où ce théorème : *Concevons une verticale mobile AZ passant par le point A : le mouvement relatif de la baguette par rapport à cette verticale sera celui d'un pendule simple de longueur $l = 4a : 3$, jusqu'au moment où la baguette AB étant couchée sur l'horizontale OX s'arrêtera brusquement.*

Pour calculer ϖ, ϖ', on peut faire usage du principe du centre de gravité ; il fournit les équations

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \varpi, \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = -Mg + \varpi', \quad \text{et l'on a} \quad x_1 = a\cos\theta, \quad y_1 = a\sin\theta.$$

De là et de l'équation (β) on tire

$$\varpi = \frac{3Mg}{4}(3\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta_0\cos\theta_0), \quad \varpi' = Mg\left[1 + \frac{3}{4}(2\sin^2\theta - \cos^2\theta - 2\sin\theta_0\sin\theta)\right]$$

8. *Théorème de Villarceau.* — Dans un système matériel quelconque, soient $G = \sum m\rho^2$ la somme des masses des points multipliées par les carrés de leurs distances à une origine fixe, v la vitesse d'un point, P la force extérieure appliquée à ce point, Π l'énergie potentielle du système ; on a, à chaque instant,

$$\sum mv^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2G}{dt^2} + \mathrm{S}r\frac{d\Pi}{dr} - \sum P\rho\cos(P, \rho).$$

9. Un système de points matériels libres qui s'attirent en raison directe des masses et en raison inverse du cube de la distance, n'est d'ailleurs soumis à l'action d'aucune force extérieure. Démontrer que la quantité

$$\frac{d^2G}{dt^2} = \frac{d^2\sum m\rho^2}{dt^2}$$

est constante, quels que soient l'instant considéré et le point O auquel se rapportent les distances ρ.

R. Combiner le théorème de l'ex. 8 avec l'équation des forces vives.

CHAPITRE XXVI.

THÉORIE DES MOMENTS D'INERTIE.

186. Les théorèmes généraux qui précèdent suffisent, comme nous le verrons, pour résoudre les problèmes relatifs au mouvement des solides; mais cette application exige le calcul de certaines sommes qui s'étendent à tous les points matériels d'un corps, semblables à celles que nous a offertes la théorie des centres de gravité, et l'étude de leurs propriétés, qui jouent un rôle important dans les questions relatives au mouvement des solides.

On nomme *moment d'inertie* d'un corps par rapport à une droite la somme des masses de ses points multipliées respectivement par les carrés de leurs distances à la droite. Si donc m représente la masse d'un point, r sa distance à la droite, H le moment d'inertie du corps, on a

$$H = \Sigma mr^2,$$

Σ désignant une somme qui s'étend à tous les points du corps.

Les coordonnées de la masse m étant x, y, z, les moments d'inertie A, B, C du corps par rapport aux axes OX, OY, OZ auront pour expressions

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m (z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2).$$

On voit, par ce qui précède, que le moment d'inertie d'un corps dépend 1° de la distribution de la matière dans le corps lui-même; 2° de la position de la droite par rapport à laquelle on prend le moment d'inertie. Nous allons successivement chercher pour un même corps, supposé donné, les relations qui ont lieu entre ses moments d'inertie par rapport à différentes droites 1° passant par une même origine O; 2° parallèles à une même direction donnée.

187. Soient α, β, γ les angles directeurs d'une droite OS; $MP = r$ la distance d'un point (x, y, z) à cette droite. On a

$$\begin{aligned} r^2 &= \overline{OM}^2 - \overline{OM}^2 \cos^2 MOS = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 \\ &= (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma \\ &\quad - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

Substituant dans l'équation $H = \Sigma mr^2$, faisant sortir du signe Σ les facteurs $\cos^2\alpha\ldots$, $\cos\beta\cos\gamma,\ldots$ qui sont communs à tous les points, et posant

$$D = \Sigma myz, \quad E = \Sigma mzx, \quad F = \Sigma mxy,$$

on trouvera, pour le moment d'inertie par rapport à OS,

$$(1)\ H = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Mais la loi suivant laquelle varie H d'après la direction de OS se manifeste plus clairement par la construction suivante : portons sur OS, à partir de l'origine, une longueur $OR = 1 : \sqrt{H}$. Les coordonnés ξ, η, ζ du point R seront

$$\xi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{H}}, \quad \eta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{H}}, \quad \zeta = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{H}},$$

et si l'on substitue ces valeurs de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ dans l'équation (1), il viendra, après suppression du facteur H,

$$(2)\qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = 1,$$

équation qui est celle du lieu géométrique du point R. Ce lieu est une surface du second ordre qui a pour centre le point O ; elle est fermée puisque OR ne peut devenir ni imaginaire, ni infini ; c'est donc un ellipsoïde. Donc, *si l'on porte sur chaque droite OS passant par le point O, à partir de ce point, une longueur égale à l'unité divisée par la racine carrée du moment d'inertie correspondant, le lieu des extrémités de ces droites sera un ellipsoïde ayant pour centre le point O.* On le nomme l'*ellipsoïde central* du corps relatif au point O.

On sait, par les propriétés des surfaces du second ordre, que cet ellipsoïde admet trois diamètres rectangulaires qui, étant pris pour axes coordonnés, auraient ramené l'équation de la surface à la forme

$$(3)\qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

les coefficients de $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ étant nuls : ce sont les axes principaux de l'ellipsoïde ; on les appelle ici *axes principaux d'inertie* du corps par rapport au point O, et les moments d'inertie A, B, C qui y rapportent sont les *moments principaux d'inertie*. D'ailleurs, comme la condition pour que l'équation de la surface ne renferme pas les rectangles $\xi\eta$, etc., est que D, E, F soient nuls, nous tirons de là cette propriété importante :

Par un point quelconque O de l'espace on peut toujours mener trois

axes rectangulaires tels que, si l'on y rapporte les points matériels d'un corps quelconque donné, on ait

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma mxy = 0;$$

ce sont les axes principaux d'inertie du corps relatifs à ce point O.

La recherche des axes et des moments principaux d'inertie d'un corps pour une origine donnée revient donc à celle des axes principaux d'un ellipsoïde, en grandeur et en direction. Ce problème a été résolu dans la géométrie analytique, et nous ne nous en occuperons pas.

188. L'expression (1) du moment d'inertie H d'un corps par rapport à une droite OS devient, en fonction des moments principaux A, B, C et des angles α, β, γ que cette droite fait avec les axes principaux,

$$(4) \qquad H = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

On déduit de cette équation, ou de la considération de l'ellipsoïde central, les corollaires suivants : 1° l'axe du plus grand moment d'inertie coïncide avec le plus petit axe de l'ellipsoïde central, et l'axe du plus petit moment avec le plus grand axe de l'ellipsoïde; 2° si deux moments principaux sont égaux, $B = C$, l'ellipsoïde central est de révolution autour du troisième axe; toutes les droites également inclinées sur cet axe donnent des moments d'inertie égaux; celles qui sont normales à cet axe donnent des moments égaux à B et sont des axes principaux.

3° Pour qu'une droite OZ soit axe principal d'inertie du corps relativement à un point O de cette droite, il faut et il suffit qu'en prenant le point pour origine et la droite pour axe des z, l'équation (2) ne renferme z qu'au carré, c'est-à-dire que l'on ait $D = 0$, $E = 0$, ou

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0.$$

Telle est donc la condition à laquelle on reconnaîtra que OZ est un axe principal.

189. La loi qui lie les moments d'inertie relatifs à des droites parallèles se résume dans un théorème simple. Soient OZ, O'Z' deux droites parallèles; H, H' les moments correspondants d'un corps déterminé; δ la distance OO' des deux droites. La droite OZ étant prise pour axe des z et OO' pour axe des x positifs, nous avons

$$H' = \Sigma mr'^2 = \Sigma m[(x-\delta)^2 + y^2] = \Sigma m(x^2+y^2) + M\delta^2 - 2\delta\Sigma mx,$$

ou, x_1 désignant l'abscisse du centre de gravité,

$$H' = H + M\delta^2 - 2\delta M x_1.$$

Cette équation se simplifie si l'on suppose que OZ passe par le centre de gravité du corps ; on a $x_1 = 0$, et

$$(5) \qquad H' = H + M\delta^2,$$

c'est-à-dire que *le moment d'inertie du corps par rapport à une droite quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à une parallèle à cette droite menée par le centre de gravité, plus le moment d'inertie du centre de gravité lui-même, dans lequel toute la masse serait réunie, par rapport à la droite proposée.*

D'où il suit que, de toutes les droites parallèles à une même direction, celle qui passe par le centre de gravité a le plus petit moment d'inertie, et toutes celles qui sont situées à la même distance de ce centre ont des moments d'inertie égaux.

Le théorème précédent, joint à la propriété qu'a l'ellipsoïde central de donner les moments d'inertie relatifs à toutes les droites passant par un même point, permet de trouver le moment d'inertie du corps par rapport à toute droite de l'espace, quand on connait les axes principaux relatifs à son centre de gravité.

190. Considérons les coefficients $D = \Sigma myz$, $E = \Sigma mzx$, $F = \Sigma mxy$ relatifs à un système d'axes rectangulaires donnés, et cherchons les coefficients $D' = \Sigma my'z'$, $E' = \Sigma mz'x'$, $F' = \Sigma mx'y'$ relatifs à un système O'X'Y'Z' d'axes parallèles aux premiers. Les coordonnées de O' par rapport à OXYZ étant α, β, γ, nous avons

$$D' = \Sigma my'z' = \Sigma m(y-\beta)(z-\gamma) = \Sigma myz - \beta\Sigma mz - \gamma\Sigma my + M\beta\gamma$$

ou

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} D' &= D - M(\beta z_1 + \gamma y_1 - \beta\gamma), \\ E' &= E - M(\gamma x_1 + \alpha z_1 - \gamma\alpha), \\ F' &= F - M(\alpha y_1 + \beta x_1 - \alpha\beta). \end{aligned} \right.$$

Ces formules permettent de résoudre plusieurs questions.

1° Si l'origine O coïncide avec le centre de gravité du corps, x_1, y_1, z_1 sont nuls; on a

$$D' = D + M\beta\gamma, \quad E' = E + M\gamma\alpha, \quad F' = F + M\alpha\beta.$$

2° Si OZ est un axe principal relatif au centre de gravité O, D et E sont nuls (**188**); si de plus on admet que le point O' soit sur OZ, c'est-à-dire que $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on aura évidemment

$$D' = 0, \quad E' = 0, \quad F' = F,$$

donc O'Z' ou OZ sera encore axe principal d'inertie pour le point O'. De là ce théorème : *Chaque axe principal d'inertie d'un corps, relatif à son centre de gravité, jouit de la propriété de rester axe principal relativement à chacun de ses propres points.*

3° Étant donnée une droite OZ, déterminer sur cette droite un point O' pour lequel OZ soit un axe principal d'inertie du corps ? — Prenant OZ pour axe des z, on aura dans les formules (6), $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et il faudra que l'on ait aussi $D' = 0$, $E' = 0$ pour que le point O' satisfasse à la question. De là les équations

$$0 = D - M\gamma y_1, \quad 0 = E - M\gamma x_1,$$

d'où

$$\frac{D}{My_1} = \frac{E}{Mx_1} = \gamma.$$

Il faudra donc, pour que le point O' existe, que l'on ait la relation $Dx_1 - Ey_1 = 0$, et alors l'équation précédente déterminera γ et fera connaître la position du point O'.

191. Nous allons montrer l'importance des moments d'inertie dans diverses questions relatives à la rotation. 1° Supposons un solide tournant actuellement autour d'un axe OR, fixe ou instantané, avec une vitesse angulaire ω, et cherchons la somme des moments des quantités de mouvement du solide par rapport à cet axe. Si m, r désignent la masse d'un point et sa distance à l'axe, sa quantité de mouvement est $m\omega r$, et comme elle est normale à l'axe OR et au rayon de rotation r, son moment par rapport à l'axe est $m\omega r^2$, le sens des moments positifs étant celui des rotations positives. On a donc, pour le solide entier,

$$\Sigma m\omega r^2 = \omega \Sigma m r^2 = H\omega,$$

donc *la somme des moments des quantités de mouvement d'un solide par rapport à son axe de rotation est égale au produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe.*

2° Pour trouver l'axe du couple résultant des quantités de mouvement du solide relatif à un point O, pris sur l'axe de rotation OR, supposons que l'on choisisse pour axes coordonnés OX, OY, OZ les axes principaux d'inertie du solide par rapport au point O, considérés dans la position qu'ils occupent actuellement, et soient p, q, r les composantes de l'axe instantané OR suivant OX, OY, OZ. Les composantes de la vitesse d'un point m (x, y, z) sont (**17**)

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx.$$

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à OX sera donc

$$\Sigma m\,(yv_z - zv_y) = p\Sigma m\,(y^2 + z^2) - q\Sigma myz - r\Sigma mxz,$$

les facteurs p, q, r pouvant être mis hors du signe Σ. Mais OX, OY, OZ étant des axes principaux d'inertie, si A, B, C désignent les moments principaux correspondants, nous avons

$$\Sigma m\,(y^2 + z^2) = \mathrm{A}, \quad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0.$$

Substituant, et opérant de même pour les axes OY, OZ, *on aura*

$$\mathrm{A}p, \quad \mathrm{B}q, \quad \mathrm{C}r$$

pour les projections de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement du solide sur les axes principaux d'inertie relatifs au point O, *pris sur l'axe de rotation.*

3° Enfin, *la force vive totale du solide,* dans sa rotation autour de OR, a pour valeur

$$\Sigma mv^2 = \Sigma m\omega^2 r^2 = \omega^2 \Sigma mr^2 = \mathrm{H}\omega^2;$$

elle *est le produit du carré de la vitesse angulaire par le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.*

Soit Σmr^2 le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite; posons

$$\Sigma mr^2 = \mathrm{M}k^2.$$

La quantité k, définie par cette équation, se nomme souvent le *rayon de gyration.*

192. *Calcul des moments d'inertie.* — La difficulté est la même que dans la recherche des centres de gravité : une sommation à faire pour tous les points matériels d'un corps; et on la tourne de la même manière (**102**). Soient $\mathrm{H} = \Sigma mr^2$ le moment d'inertie à évaluer, ρ la densité du corps en un point quelconque (x, y, z). Décomposons le volume du corps en éléments *très-petits* $\Delta\omega$; la masse contenue dans un de ces éléments étant $\rho\Delta\omega$, et la distance désignée par r étant sensiblement la même pour tous les points compris dans l'élément, la portion du moment d'inertie total H qui répond à l'élément $\Delta\omega$ sera sensiblement égale à $\rho\Delta\omega . r^2$, r se rapportant à un point déterminé de cet élément. On aura donc $\mathrm{H} = \Sigma\rho r^2\Delta\omega$, le signe Σ se rapportant ici à tous les éléments de volume $\Delta\omega$ compris dans le corps. Or, cette somme ne diffère qu'infiniment peu de l'intégrale définie triple qui serait sa limite si l'on faisait

tendre vers zéro tous les éléments $\Delta\omega$, en sorte que l'on aura sensiblement

$$H = \int \rho r^2 d\omega,$$

$d\omega$ étant l'élément *infiniment petit* du volume du corps, et les limites de l'intégrale étant les mêmes que pour l'évaluation du volume de ce corps.

En raisonnant de la même manière, on transformera les formules

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m (z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2),$$

qui déterminent exactement les moments d'inertie relatifs aux axes coordonnés, en celles-ci

$$A = \int \rho (y^2 + z^2) d\omega, \quad B = \int \rho (z^2 + x^2) d\omega, \quad C = \int \rho (x^2 + y^2) d\omega,$$

dont l'exactitude suffit pour les évaluations les plus précises. On aura de même

$$D = \int \rho yz d\omega, \quad E = \int \rho zx d\omega, \quad F = \int \rho xy d\omega.$$

Ces dernières intégrales s'annuleront si l'on choisit pour axes coordonnés les axes principaux relatifs à l'origine O.

193. Prenons pour exemple un parallélipipède rectangle homogène. L'origine étant au centre O, les axes OX, OY, OZ parallèles aux arêtes $2a$, $2b$, $2c$, la constante ρ sortant du signe d'intégration, il est clair que l'on a

$$\int yz d\omega = 0, \quad \int zx d\omega = 0, \quad \int xy d\omega = 0,$$

à cause de la symétrie par rapport aux plans coordonnés. Les axes OX, OY, OZ sont donc des axes principaux. Nous avons ensuite, en posant

$$d\omega = dx\, dy\, dz,$$

$$\int \rho x^2 d\omega = \rho \int x^2 d\omega = \rho \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-b}^{+b} dy \int_{-c}^{+c} dz = 4\rho bc \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{8\rho a^3 bc}{3},$$

ou, à cause de la relation $M = 8\rho abc$,

$$\int \rho x^2 d\omega = \frac{Ma^2}{3}.$$

Un calcul semblable donne

$$\int \rho y^2 d\omega = \frac{Mb^2}{3}, \quad \int \rho z^2 d\omega = \frac{Mc^2}{3}.$$

Les moments principaux d'inertie relatifs au point O sont donc

$$A = \frac{M}{3}(b^2 + c^2), \quad B = \frac{M}{3}(c^2 + a^2), \quad C = \frac{M}{3}(a^2 + b^2).$$

Le moment d'inertie du parallélipipède par rapport à une droite quelconque OS se tirera de la formule (4). Par exemple, pour une diagonale OK, on aura

$$H = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2M}{3} \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Faisant usage de la propriété établie au n° **189**, on trouve pour les moments d'inertie relatifs aux arêtes $2a$, $2b$, $2c$,

$$\frac{4M}{3}(b^2 + c^2), \quad \frac{4M}{3}(c^2 + a^2), \quad \frac{4M}{3}(a^2 + b^2).$$

194. Comme second exemple, déterminons le moment d'inertie H' d'une lentille homogène, biconvexe, comprise entre deux calottes sphériques de même rayon R, par rapport à une droite MN parallèle à l'axe de figure OX de la lentille et distant d'une quantité δ de cet axe. Soient $2a = AB$ l'épaisseur, $b = CD$ le rayon de la lentille. Cherchons d'abord le moment d'inertie H relatif à l'axe OX. Décomposons le volume de la lentille en tranches infiniment minces par des plans perpendiculaires à l'axe OX, et chaque tranche en anneaux de révolution autour de cet axe. Nommant x, y les coordonnées d'un point de l'élément plan générateur, par rapport à AX, AY, on a évidemment



$$H = 4\pi\rho \int_0^a dx \int_0^{y_1} y^3 dy = \pi\rho \int_0^a y_1^4 dx,$$

$y_1 = \sqrt{x(2R - x)}$ représentant l'ordonnée de l'arc de cercle AD. De là

$$H = \pi\rho \int_0^a (2Rx - x^2)^2 dx = \pi\rho a^3 \left(\frac{4R^2}{3} - Ra + \frac{a^2}{5}\right).$$

Mais les coordonnées du point D étant a, b, on a

$$b^2 = a(2R - a) \quad \text{ou} \quad 2Ra = a^2 + b^2,$$

d'où, éliminant R, on tire

$$H = \frac{\pi\rho a}{30}(a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4).$$

Pour avoir H', nous devons (**189**) ajouter à H le produit de la masse

M de la lentille par la distance δ de son centre de gravité à la droite MN. Or, nous trouvons facilement

$$M = 2\rho \cdot \pi \int_0^a y_1^2 dx = 2\pi\rho \int_0^a (2Rx - x^2)\, dx = 2\pi\rho a^2 \left(R - \frac{a}{3}\right),$$

ou, mettant pour R sa valeur,

$$M = 2\pi\rho a \left(\frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{2}\right) = \frac{\pi\rho a}{3}(a^2 + 3b^2).$$

Donc, enfin,

$$H' = \frac{\pi\rho a}{30}\left[a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4 + 10(a^2 + 3b^2)\delta^2\right].$$

195. On a besoin de calculer, dans certaines questions de mécanique appliquée, le moment d'inertie d'une surface plane par rapport à une droite OX, ordinairement située dans son plan. On nomme ainsi la somme H des éléments infiniment petits $d\omega$ de l'aire, multipliés respectivement par les carrés de leurs distances r a la droite OX. On a donc

$$H = \Sigma r^2 d\omega = \int dx \int r^2 dy,$$

les limites des intégrales étant déterminées par le contour de l'aire. Si la droite OX est prise pour axe des x, que l'on désigne par y_0, y les ordonnées correspondantes à un même x sur le contour de l'aire, par x_0, x les valeurs de x entre lesquelles tombent tous les points de ce contour, on aura,

$$r = y, \qquad H = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x} (y^3 - y_0^3)\, dx.$$

Exemples. — I. *Rectangle, par rapport à une droite parallèle à un de ses côtés.* — Soient AD $= a$, AB $= b$ les côtés du rectangle, δ la distance du côté AD à la droite OX qui lui est parallèle. On a ici

$$y_0 = \delta, \qquad y = \delta + b, \qquad x = x_0 + a,$$

d'où

$$H = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_0+a} [(\delta + b)^3 - \delta^3]\, dx = \frac{ab}{3}(3\delta^2 + 3b\delta + b^2).$$

II. *Ellipse, par rapport à l'un de ses axes.* — L'équation de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

H est égal à quatre fois le moment d'inertie du quart de l'aire de l'ellipse ; on a donc

$$x_0 = 0, \quad x = a, \quad y_0 = 0, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où

$$H = \frac{4b^3}{3a^3}\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

Posant $x = a \sin \varphi$, on trouve

$$H = \frac{4ab^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{ab^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi,$$

d'où

$$H = \frac{\pi ab^3}{4}.$$

Exercices.

1. **Démontrer que la somme des moments d'inertie d'un corps par rapport à trois droites rectangulaires partant d'un point O est constante et égale à la somme des moments principaux relatifs au même point.**

R. **Conséquence de l'équation (4).**

2. **Déterminer le point de l'espace pour lequel les axes principaux d'inertie d'un corps donné sont parallèles à trois directions rectangulaires données.**

R. **L'origine des axes, parallèles à ces directions, étant placée au centre de gravité G du corps, soient $D = \sum myz$, $E = \sum mzx$, $F = \sum mxy$ les coefficients relatifs à ces axes ; α, β, γ les coordonnées du point cherché. On a, par les équations (6),**

$$\alpha = \sqrt{-\frac{EF}{MD}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{FD}{ME}}, \quad \gamma = \sqrt{-\frac{DE}{MF}}.$$

3. **Étant donnés trois axes rectangulaires OX', OY', OZ', et les coefficients correspondants à ces axes pour un corps donné, $A' = \sum m\,(y'^2 + z'^2), \ldots$, $D' = \sum my'z', \ldots$, trouver les directions des axes principaux d'inertie relatifs au point O et les moments principaux correspondants A, B, C.**

R. **C'est le même problème que de trouver les directions et les grandeurs des axes principaux d'un ellipsoïde dont on a l'équation. Soient α, β, γ les angles directeurs d'un axe principal, H le moment d'inertie correspondant ; on aura**

$$\frac{A' \cos \alpha - F' \cos \beta - E' \cos \gamma}{\cos \alpha} = \frac{B' \cos \beta - D' \cos \gamma - F' \cos \alpha}{\cos \beta}$$
$$= \frac{C' \cos \gamma - E' \cos \alpha - D' \cos \beta}{\cos \gamma} = H.$$

De là

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{l}(A'-H)\cos\alpha - F'\cos\beta - E'\cos\gamma = 0,\\ -F'\cos\alpha + (B'-H)\cos\beta - D'\cos\gamma = 0,\\ -E'\cos\alpha - D'\cos\beta + (C'-H)\cos\gamma = 0.\end{array}\right.$$

Ces équations conduisent, par l'élimination de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, à celle-ci :

$$\begin{vmatrix} A'-H & -F' & -E' \\ -F' & B'-H & -D' \\ -E' & -D' & C'-H \end{vmatrix} = 0,$$

équation dont les trois racines réelles en H donnent les valeurs des moments principaux demandés, après quoi le système (α) fera connaître, pour chacune de ces valeurs de H, les cosinus directeurs de l'axe principal correspondant.

4. Connaissant les axes et les moments principaux d'un corps relatifs à son centre de gravité G, trouver les axes et les moments principaux relatifs à un point donné K.

R. Les axes principaux relatifs à G étant pris pour axes coordonnés, soient A, B, C les moments principaux; ξ, η, ζ les coordonnées du point K, $r = GK$; H le moment d'inertie du corps relatif à une droite menée par K et ayant pour cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. On a, par les équations (4) et (5),

$$H = (A + Mr^2)\cos^2\alpha + (B + Mr^2)\cos^2\beta + (C + Mr^2)\cos^2\gamma - M(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)^2.$$

Pour rendre H maximum ou minimum, on pose $dH = 0$; on a d'ailleurs

$$\cos\alpha\, d.\cos\alpha + \cos\beta\, d.\cos\beta + \cos\gamma\, d.\cos\gamma = 0;$$

combinant ces relations et posant $\theta = Mr^2 - H$, on a

$$(A+\theta)\cos\alpha - M\xi(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma) = 0,\quad (B+\theta)\cos\beta - M\eta(\xi\cos\alpha + \cdots) = 0,$$

$$(C+\theta)\cos\gamma - M\zeta(\xi\cos\alpha + \cdots) = 0,$$

équations qui conduisent, par l'élimination de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ... à

$$(\beta)\quad \frac{\xi^2}{A+\theta} + \frac{\eta^2}{B+\theta} + \frac{\zeta^2}{C+\theta} = \frac{1}{M}.$$

Cette équation a trois racines réelles en θ, qui sont les valeurs de $Mr^2 - H$ correspondantes aux axes principaux d'inertie relatifs au point K. La direction d'un axe principal vérifie les équations

$$\frac{\cos\alpha}{\dfrac{\xi}{A+\theta}} = \frac{\cos\beta}{\dfrac{\eta}{B+\theta}} = \frac{\cos\gamma}{\dfrac{\zeta}{C+\theta}},$$

qui conduisent au théorème suivant : *Si dans l'équation* (β) *on considère* ξ, η, ζ *comme des coordonnées courantes; θ comme un paramètre variable, cette équation représente un système de surfaces du second ordre homofocales à l'ellipsoïde*

$$\frac{\xi^2}{A} + \frac{\eta^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} = 1.$$

Par chaque point K *de l'espace passent trois de ces surfaces* (ellipsoïde, hyperboloïdes à une et deux nappes) ; *les tangentes aux courbes d'intersection des trois surfaces en* K

se coupent à angle droit, et sont les directions des axes principaux d'inertie relatifs au point K.

5. Connaissant les axes et moments principaux relatifs au centre de gravité d'un corps, trouver les points de l'espace pour lesquels l'ellipsoïde central se réduit à une sphère.

R. On calcule, par la transformation des coordonnées parallèles (100), les quantités $\sum m(y'^2+z'^2),\ldots\ \sum my'z',\ldots$ relatives à un point quelconque; on trouve 1° qu'il faut que l'ellipsoïde central relatif au c. de gr. soit de révolution autour de son plus petit axe; 2° qu'il y a alors deux points vérifiant la condition, situés sur cet axe de part et d'autre de G, à une distance $\sqrt{\frac{C-A}{M}}$, C se rapportant à l'axe de révolution.

6. M. d'in. d'un ellipsoïde homogène par rapport aux axes.

R. Soient $2a$, $2b$, $2c$ les axes; on a

$$A=\frac{M}{5}(b^2+c^2),\quad B=\frac{M}{5}(c^2+a^2),\quad C=\frac{M}{5}(a^2+b^2).$$

7. M. d'in. d'une sphère homogène par rapport à un diamètre.

R. Le rayon de la sphère étant R, on a

$$H=\frac{8\pi}{15}\rho R^5=\frac{2M}{5}R^2.$$

8. Même problème, la densité décroissant uniformément du centre à la surface.

R. Soient ρ_0 la densité au centre, $\rho_0-\mu r$ la densité à une distance r, on a

$$H=\frac{8\pi R^5}{3}\left(\frac{\rho_0}{5}-\frac{\mu R}{6}\right).$$

9. M. d'in. d'un cylindre homogène de rayon a, de hauteur $2h$, par rapport à son axe.

R. $$H=\pi\rho h a^4.$$

10. M. d'in. du même corps, par rapport à une perpendiculaire au milieu de son axe.

R. On décompose le cylindre en éléments par des plans z parallèles aux bases, des plans φ passant par l'axe, des cylindres r de révolution autour de l'axe. On trouve

$$H=\rho\int_{-h}^{+h}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a(z^2+r^2\sin^2\varphi)\,rdr=2\pi\rho a^2h\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)=M\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right).$$

11. M. d'in. d'un cylindre elliptique homogène par rapport à son axe.

R. Hauteur $2h$; a, b demi-axes de la base;

$$H=\frac{2\rho b}{a}\int_0^{2h}dz\int_{-a}^{+a}x^2dx\sqrt{a^2-x^2}+\frac{2\rho}{3}\frac{b^3}{a^3}\int_0^{2h}dz\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx;$$

$$H=\frac{\pi\rho hab}{2}(a^2+b^2)=\frac{M}{4}(a^2+b^2).$$

12. M. d'in. d'une droite homogène par rapport à un axe passant par son extrémité et incliné d'un angle β.

R. Soit l la longueur de la droite ;

$$H = \frac{\rho}{3} l^3 \sin^2 \beta.$$

13. M. d'inertie de l'aire d'un triangle isocèle, par rapport à la hauteur h perpendiculaire au milieu de la base $2b$.

R.
$$H = \frac{b^3 h}{6}.$$

14. Une figure plane, symétrique par rapport à une droite AB, tourne autour d'une parallèle OX à AB et engendre un solide de révolution homogène. Trouver le moment d'inertie H de ce solide par rapport à OX.

R. $H = M(3k^2 + \delta^2)$, δ étant la distance entre AB et OX, k le rayon de gyration de la figure plane par rapport à AB, M la masse du solide engendré.

15. Trouver le moment d'inertie d'un anneau homogène, engendré par un losange tournant autour d'un axe OX parallèle à une de ses diagonales, par rapport à l'axe OX.

R. Application du précédent.

16. M. d'in. d'un tore homogène par rapport 1° à son axe de figure ; 2° à un diamètre équatorial.

R. M, masse du tore ; a, rayon du cercle générateur ; δ, distance de son centre à l'axe de figure.

$$1° \quad C = M\left(\delta^2 + \frac{3a^2}{4}\right); \qquad 2° \quad A = M\left(\frac{\delta^2}{2} + \frac{7}{8}a^2\right).$$

CHAPITRE XXVII.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE.

196. Considérons un solide qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe OO' ; soient, à l'époque t, ω la vitesse angulaire du solide autour de OO', P_1 la composante, normalement à l'axe, de l'une quelconque des forces qui agissent sur le corps, p la distance entre l'axe et cette composante, H le moment d'inertie *constant* du solide par rapport à l'axe.

Appliquons le théorème des moments (**170**) : la dérivée par rapport à t de la somme des moments des quantités de mouvement relative à l'axe fixe OO', est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au même axe. Or, la première de ces deux sommes est égale

à $H\omega$ (**191**), la seconde à $\Sigma P_1 p$ (**71**), le signe Σ s'étendant à toutes les forces extérieures. Les réactions des points fixes O et O' font partie des forces extérieures, mais leurs moments sont nuls. On a donc

$$\frac{d.H\omega}{dt} = \Sigma P_1 p,$$

ou, autrement,

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma P_1 p}{H}.$$

A chaque instant, *la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces appliquées au solide par rapport à l'axe de rotation, divisée par le moment d'inertie du solide par rapport au même axe.*

On doit observer que l'équation (1) suppose que le sens des moments *positifs* soit le même que le sens de la rotation *positive*, et qu'ainsi, le produit $P_1 p$ doit être affecté du signe + ou du signe — selon que la force P_1 tend à produire une rotation dans le sens positif ou en sens contraire.

Soit θ l'angle compris entre deux plans, l'un fixe, l'autre mobile avec le solide, passant par l'axe. On sait que l'on a

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

substituant cette valeur dans l'équation (1), on aura une équation du second ordre en θ, et si l'on sait l'intégrer, on en déduira les valeurs



de θ, ω en fonction du temps, avec deux constantes arbitraires que déterminent les valeurs θ_0, ω_0 de ces variables pour $t = 0$.

197. Comme exemple du mouvement d'un solide autour d'un axe fixe, prenons un solide pesant et un axe horizontal. G étant le centre de gravité du solide, menons par ce point un plan GOZ perpendiculaire à l'axe, et soient O l'intersection de ce plan et de l'axe, $OG = a$ la distance du centre de gravité à l'axe, M la masse du solide, θ l'angle variable que fait la droite OG avec la verticale OZ, α la valeur de θ pour $t = 0$.

Nous pouvons appliquer l'équation (1), mais le théorème des forces vives conduit plus vite au résultat. La force vive totale du solide, à l'époque t, a pour expression (**191**) $H\omega^2$. Le travail produit par la

pesanteur, depuis l'époque $t = 0$ jusqu'à l'époque t, est mesuré (**177**) par

$$Mg[z_1 - (z_1)_0] = Mga(\cos\theta - \cos\alpha).$$

L'axe étant fixe, le travail des réactions des points d'appui est égal à zéro. On a donc, en vertu du théorème des forces vives (**179**) et en supposant nulle la vitesse initiale

$$H\omega^2 = 2Mga(\cos\theta - \cos\alpha),$$

ou

$$(2) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2Mga}{H}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Telle est l'équation différentielle du premier ordre qui détermine l'angle θ et par suite fait connaître le mouvement du solide : on l'aurait tirée de l'équation (1) par une première intégration.

Mais il est inutile d'intégrer l'équation (2), car on voit sans peine que si l'on pose

$$\frac{Ma}{H} = \frac{1}{l} \qquad \text{ou} \qquad (3) \quad l = \frac{H}{Ma},$$

elle prend la forme

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

et devient identique avec celle qui détermine (**156**) le mouvement du pendule simple de longueur l. Donc la droite OG, dans le solide, a exactement le même mouvement qu'un pendule simple dont la longueur l est définie par l'équation (3), et comme ce dernier mouvement nous est bien connu, comme d'ailleurs il est clair que le mouvement de la droite OG détermine celui du solide tout entier, le problème proposé est résolu.

198. On nomme *pendule composé* un solide pesant qui oscille autour d'un axe horizontal ; sa *longueur* l est la longueur du pendule simple dont le mouvement serait le même que celui de la droite OG dans le pendule composé : elle est donnée par l'équation (3). Ainsi *la longueur du pendule composé est égale au moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension, divisé par le produit de la masse du pendule et de la distance de son centre de gravité à l'axe.*

Toutes les conséquences développées au chapitre XXII sont applicables :

ainsi, l'amplitude des oscillations étant supposée très-petite, la durée d'une demi-oscillation sera donnée par la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{etc...}$$

Prenons sur OG, à partir du point O une longueur OC égale à l; C sera le *centre d'oscillation* du pendule, O étant le *centre de suspension*.

Concevons, par le centre de gravité G du solide, une parallèle à l'axe; soit Mk^2 le moment d'inertie du solide par rapport à cette parallèle. Nous aurons, par le théorème connu (**189**),

$$H = Mk^2 + Ma^2,$$

d'où

$$l = a + \frac{k^2}{a},$$

ce qui montre d'abord que l est $> a$; donc *le centre de gravité est toujours compris entre le centre d'oscillation et le centre de suspension*. De plus, il vient

$$a(l - a) = GO \cdot GC = k^2.$$

Or, k^2 est évidemment constant si la direction de l'axe de suspension ne change pas par rapport au solide, donc le produit GO · GC reste aussi constant dans ces conditions. En particulier, *si l'on prend le point* C *pour centre de suspension*, O *deviendra le centre d'oscillation*, et la longueur l du pendule, conséquemment *la durée d'oscillation, ne variera pas*. En d'autres termes, *le centre d'oscillation et le centre de suspension sont réciproques l'un de l'autre*.

On peut même s'assurer que la longueur l reste la même pour tous les axes de suspension parallèles, situés à la même distance du centre de gravité, et de tous les axes parallèles, celui qui donne l'oscillation la plus courte correspond à

$$1 - \frac{k^2}{a^2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad a = k.$$

199. *Pression sur l'axe*. — Revenons au cas général du N° **196**. Pour calculer les pressions que le solide tournant exerce sur ses points d'appui fixes O et O', prenons OO' pour axe des z positifs, l'origine en O, $OO' = a$. Soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes rectangulaires de l'une quelconque des forces P qui sollicitent le solide; x, y, z les coordonnées de son point d'application, U, V, W, les com-

posantes de la réaction du point O ; U', V', W' celles de la réaction du point O'. Joignons ces réactions aux forces motrices; le solide sera considéré comme libre, et l'on appliquera les équations (3) et (7) du chapitre XXIV.

On a d'abord, pour un point quelconque (17),

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0,$$

d'où

$$\Sigma m v_x = -\omega \Sigma m y, \quad \Sigma m v_y = \omega \Sigma m x, \quad \Sigma m v_z = 0,$$

$$\Sigma m (y v_z - z v_y) = -\omega \Sigma m x z, \quad \Sigma m (z v_x - x v_z) = -\omega \Sigma m y z,$$

$$\Sigma m (x v_y - y v_x) = \omega \Sigma m (x^2 + y^2) = H\omega.$$

De là on tire, en prenant les dérivées par rapport à t, remplaçant v_x, v_y, v_z par leurs valeurs ci-dessus, et observant que

$$\Sigma m x = M x_1, \quad \Sigma m y = M y_1,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m v_x = -M\left(\omega^2 x_1 + \frac{d\omega}{dt} y_1\right), \quad \frac{d}{dt}\Sigma m v_y = -M\left(\omega^2 y_1 - \frac{d\omega}{dt} x_1\right),$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m v_z = 0, \quad \frac{d}{dt}\Sigma m (y v_z - z v_y) = \omega^2 \Sigma m y z - \frac{d\omega}{dt}\Sigma m x z,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m (z v_x - x v_z) = -\omega^2 \Sigma m x z - \frac{d\omega}{dt}\Sigma m y z,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m (x v_y - y v_x) = H\frac{d\omega}{dt}.$$

Substituons ces résultats dans les équations (3) et (7) du ch. XXIV. Il viendra

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma X + U + U' = -M\left(\omega^2 x_1 + \frac{d\omega}{dt} y_1\right),\\ &\Sigma Y + V + V' = -M\left(\omega^2 y_1 - \frac{d\omega}{dt} x_1\right),\\ &\Sigma Z + W + W' = 0;\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma (yZ - zY) - aV' = \omega^2 \Sigma m y z - \frac{d\omega}{dt}\Sigma m x z,\\ &\Sigma (zX - xZ) + aU' = -\omega^2 \Sigma m x z - \frac{d\omega}{dt}\Sigma m y z,\\ &\Sigma (xY - yX) = H\frac{d\omega}{dt}.\end{aligned}\right.$$

La dernière équation n'est autre que l'équation (1); c'est celle qui détermine le mouvement du solide. Les deux premières équations (5) font ensuite connaître U′ et V′, après quoi l'on tire des deux premières équations (4) les valeurs de U et de V. Quant aux réactions suivant l'axe, W et W′, leur somme seule est déterminée par l'équation

$$W + W' = \Sigma Z,$$

par un motif que nous avons déjà discuté (**91**). Elle est d'ailleurs la même que si le solide était en repos.

200. Considérons en particulier le cas où le solide continue à tourner en vertu d'une impulsion acquise, sans qu'aucune force agisse encore sur lui. Nous ferons $X = Y = Z = 0$ pour un point quelconque. La dernière équation (5) nous donnera

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \qquad \omega = \text{const.} = \omega_0.$$

Ainsi, *la vitesse angulaire de rotation ne varie pas*. De plus, nous aurons

$$U + U' = -M\omega^2 x_1, \quad V + V' = -M\omega^2 y_1, \quad W + W' = 0,$$

$$aV' = -\omega^2 \Sigma myz, \quad aU' = -\omega^2 \Sigma mxz,$$

équations qui servent à calculer les réactions des points d'appui O, O′.

Supposons que l'axe OO′ soit un axe principal d'inertie du solide relatif au point O; nous aurons, quelque soit t,

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0,$$

d'où

$$U' = 0, \quad V' = 0.$$

On sait d'ailleurs que la réaction W′ du point O′ peut être supposée appliquée en O (**91**) sans que cela change rien au mouvement du système; cela revient à supposer $W' = 0$. Or, U′, V′, W′ représentent les forces qu'il faudrait appliquer en O′, si ce point cessait d'être fixé, pour que le mouvement du solide continuât sans changement. Donc *si un solide s'appuie sur un point fixe* O, *et est animé d'une vitesse quelconque autour d'un de ses axes principaux d'inertie par rapport à ce point; si d'ailleurs aucune force extérieure n'agit plus sur le solide, il continuera indéfiniment à tourner, avec la même vitesse angulaire, autour de cet axe comme s'il était fixe.*

Cette propriété a fait donner aux axes principaux d'inertie le nom ***d'axes permanents de rotation;*** elle s'appliquera même à un solide

pesant, pourvu que le point fixe O coïncide avec le centre de gravité du corps, puisqu'alors l'action de la pesanteur sera détruite.

Les conditions précédentes étant toujours remplies, supposons en outre que le point O soit le centre de gravité du solide. Nous aurons $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, et les expressions des réactions des points d'appui deviendront

$$U' = 0, \quad V' = 0, \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W + W' = 0,$$

d'où il suit que l'on peut rendre libres ces deux points, dont les réactions sont nulles, sans troubler le mouvement du solide. Donc *un solide libre, qui a reçu une rotation initiale autour d'un des trois axes principaux d'inertie relatifs à son centre de gravité, et n'est soumis d'ailleurs à aucune force extérieure, continue à tourner indéfiniment d'un mouvement uniforme autour de cet axe comme s'il était fixe.*

Pour ce motif, on donne à ces axes principaux le nom d'*axes naturels de rotation.*

Exercices.

1. Soient A, B, C les moments principaux d'inertie d'un solide, relatifs à son centre de gravité; α, β, γ les angles directeurs d'une droite quelconque, par rapport aux axes de ces moments; a la distance du centre de gravité à cette droite. Toutes les droites qui vérifient la condition

$$a + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma}{Ma} = \text{const.},$$

sont des axes de suspension synchrones.

2. Déterminer la longueur du pendule composé formé d'une sphère homogène, de rayon R, dont le centre est fixé sur une tige rectiligne sans masse, suspendue à un point fixe O.

3. Un pendule composé est formé de deux sphères homogènes, de rayons R, R', de masses M, M', dont les centres sont sur une tige rectiligne sans masse. La sphère inférieure restant fixe, quelle position faut-il donner à l'autre pour que la durée de l'oscillation soit aussi courte que possible?

R. Soient a, x les distances respectives des centres de la première et de la seconde sphère au centre de suspension. La longueur du pendule est

$$l = \frac{M(2R^2 + 5a^2) + M'(2R'^2 + 5x^2)}{5(Ma + M'x)}.$$

La valeur de x qui rend l minimum est racine de l'équation

$$x^2 + \frac{2Ma}{M'}x - \frac{M(2R^2 + 5a^2) + 2M'R'^2}{5M'} = 0.$$

Si les sphères ont même rayon et même densité, on a

$$x = a + \sqrt{2a^2 + \frac{4R^2}{5}}.$$

4. Un pendule composé est formé d'une tige mince portant un cylindre étroit dont l'axe est dans le prolongement de la tige, et qui renferme du mercure. On connaît le poids P de ce pendule, les distances a, l de son centre de gravité et de son centre d'oscillation à l'axe horizontal de rotation, le rayon intérieur r du cylindre, la distance du niveau du mercure à l'axe de suspension. On demande la hauteur x de mercure qu'il faut ajouter dans le cylindre pour que le pendule batte exactement la seconde.

R. La longueur λ du pendule à seconde est

$$\lambda = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9{,}80896}{(3{,}14159)^2}.$$

Calculant par la formule (3) la longueur du pendule formé du pendule primitif et du petit cylindre de mercure de hauteur x, on aura d'autre part

$$\lambda = \frac{Pal + gH'}{Pa + M'a'g},$$

M', a', H' se rapportant au petit cylindre On trouve, ρ étant la densité du mercure,

$$M' = \pi\rho r^2 x, \quad a' = u - \frac{x}{2}, \quad H' = \pi\rho r^2 x\left(\frac{r^2}{4} + u^2 - ux + \frac{x^2}{3}\right),$$

et en égalant les deux valeurs de λ, on a pour déterminer x l'équation

$$x^3 - 3x^2\left(u - \frac{g}{2\pi^2}\right) + 3x\left(u^2 + \frac{r^2}{4} - \frac{gu}{\pi^2}\right) + \frac{3Pa}{\pi\rho r^2}\left(\frac{l}{g} - \frac{1}{\pi^2}\right) = 0.$$

5. Un solide, animé d'une vitesse angulaire initiale ω_0 autour d'un axe fixe, est soumis à une résistance équivalente à une force $k\theta$ proportionnelle à l'angle décrit, qui agirait à une distance p de l'axe. Déterminer le mouvement du solide, le temps t_1 au bout duquel il arrivera au repos, l'angle θ_1 qu'il aura décrit autour de son axe.

R. H étant le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe, posons $\frac{kp}{H} = b^2$. L'équation (1) donnera

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2\theta^2, \quad \theta = \frac{\omega_0}{b}\sin bt, \quad \omega = \omega_0 \cos bt, \quad t_1 = \frac{\pi}{2b}, \quad \theta_1 = \frac{\omega_0}{b}.$$

6. Une barre MN est suspendue par deux fils verticaux, de longueur égale a, à deux points fixes A, B, et peut tourner autour d'un axe vertical OO' passant par le centre de gravité O de la barre. On écarte celle-ci très-peu de sa position d'équilibre, et on l'abandonne à la réaction des fils suspenseurs. Déterminer son mouvement, en supposant que l'angle θ qui fait la barre avec sa position d'équilibre soit toujours assez petit pour qu'on puisse admettre qu'elle reste dans un plan horizontal, et que $\sin\theta = \theta$.

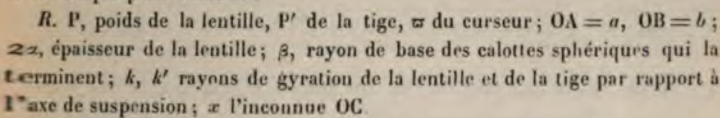
R. Soient P le poids de la barre, $OM = m$, $ON = n$. Les moments des réactions horizontales des fils sont

$$-\frac{Pm^2 n\theta}{a(m+n)}, \quad -\frac{Pmn^2\theta}{a(m+n)},$$

et l'on a, par l'équation (1), en désignant par H le moment d'inertie de la barre par rapport à OO′, posant $Pmn = aHk^2$,

$$\theta = \theta_0 \cos kt, \qquad \omega = -k\theta_0 \sin kt.$$

7. Un pendule composé est formé d'une tige cylindrique AB, suspendue en O, d'une lentille biconvexe (194) fixée en B, d'un curseur C mobile sur la branche supérieure OB (*métronome de Maelzel*). En quel point faut-il amener le curseur pour que le métronome batte par minute un nombre donné n d'oscillations ? — On suppose le curseur assez petit pour qu'on puisse l'assimiler à un simple point matériel.



R. P, poids de la lentille, P′ de la tige, ϖ du curseur ; $OA = a$, $OB = b$; 2α, épaisseur de la lentille ; β, rayon de base des calottes sphériques qui la terminent ; k, k' rayons de gyration de la lentille et de la tige par rapport à l'axe de suspension ; x l'inconnue OC.

La longueur l du pendule composé est

$$(\alpha) \qquad l = \frac{2(Pk^2 + P'k'^2 + \varpi x^2)}{2P(a+b) + P'(a-b) - 2\varpi x},$$

Les portions OA, OB de la tige ayant respectivement pour poids

$$\frac{P'a}{a+b}, \quad \frac{P'b}{a+b}.$$

On a d'ailleurs, par le N° **194**,

$$k^2 = a^2 + 2a\beta + \frac{\alpha^4 + 15\alpha^2\beta^2 + 10\beta^4}{10(\alpha^2 + 3\beta^2)}, \quad k'^2 = \frac{a^2 - ab + b^2}{3}.$$

Enfin, pour satisfaire à la condition du problème, il faut que l'on ait

$$l = \frac{g}{n^2\pi^2}(60)^2 = \frac{9{,}80896 \times 3600}{n^2(3{,}14159)^2}.$$

On tire de l'équation (α), pour déterminer x, l'équation

$$x^2 + lx + \frac{P}{\varpi}(k^2 - al - bl) + \frac{P'}{\varpi}\left(k'^2 - \frac{al}{2} + \frac{bl}{2}\right) = 0,$$

dans laquelle il faudra mettre pour k, k', l leurs valeurs ci-dessus.

8. Un solide, animé d'une vitesse initiale ω_0 autour d'un axe fixe, n'est soumis qu'à l'action d'une résistance équivalente à une force $A + B\omega^2$, agissant à la distance p de l'axe. Déterminer le mouvement du corps, l'époque t_1 à laquelle ce mouvement s'arrêtera, et l'angle total θ_1 dont le corps aura tourné à cet instant.

R. Nommant H le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe, et posant

$$\frac{B}{A} = \alpha^2, \quad \frac{Ap}{H} = \beta,$$

on trouvera l'équation différentielle

$$d\omega = -\beta\,(1 + \alpha^2\omega^2)\,dt,$$

d'où l'on tirera

$$\omega = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\alpha\omega_0 \cos\alpha\beta t - \sin\alpha\beta t}{\cos\alpha\beta t + \alpha\omega_0 \sin\alpha\beta t}, \quad \theta = -\frac{1}{\alpha^2\beta}\,l.\,(\cos\alpha\beta t + \alpha\omega_0 \sin\alpha\beta t),$$

$$t_1 = \frac{1}{\alpha\beta}\,\text{arc tg}\,\alpha\omega_0, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2\alpha^2\beta}\,l.\,(1 + \alpha^2\omega_0^2).$$

CHAPITRE XXVIII.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

201. Un solide étant fixé par un de ses points O, on donne les positions et les vitesses initiales de tous les autres, et les forces qui agissent sur le solide à un instant quelconque; il s'agit de déterminer le mouvement du solide, ou de trouver les positions et les vitesses de tous ses points dans toute la suite du temps.

On simplifie ce problème en prenant, comme dans la cinématique (**24**), trois axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ liés au solide et mobiles avec lui, axes dont on définira la position à un instant quelconque, par rapport à trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ, au moyen de leurs cosinus directeurs ou des angles ψ, θ, φ que nous avons employés déjà (**29**). Chaque point du solide ayant une position fixe par rapport au système $O\xi\eta\zeta$, le mouvement de ce système fera connaître entièrement celui du solide.



Pour former les équations différentielles du mouvement, appliquons le théorème du N° **170** : *l'axe* OG *du couple résultant des forces extérieures, relatif au point fixe* O, *est à chaque instant égal et parallèle à la vitesse du point* K, *extrémité de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement.*

Les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ pouvant être choisis à volonté dans le solide, prenons les axes principaux d'inertie relatifs au point fixe; soient A, B, C les moments principaux correspondants; p, q, r les projections de l'axe

instantané de rotation OR, G_ξ, G_η, G_ζ celles de l'axe du couple résultant des forces extérieures, sur les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ pris dans leur position actuelle. Les projections de l'axe OK sur les axes mobiles, ou les coordonnées du point K par rapport à ces axes, sont égales (**191**, 2°) à Ap, Bq, Cr. En prenant leurs dérivées par rapport au temps, on aura donc les composantes parallèles à $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ de la vitesse *relative* du point K par rapport au système $O\xi\eta\zeta$, savoir

$$A\frac{dp}{dt}, \quad B\frac{dq}{dt}, \quad C\frac{dr}{dt}.$$

Pour avoir les composantes de la vitesse *absolue* du point K, parallèlement aux mêmes axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, nous devons ajouter respectivement aux composantes de la vitesse relative celles de la vitesse d'*entraînement* du point K, c'est-à-dire, d'après les formules qui donnent les composantes de la vitesse d'un point lié à un solide tournant (**17**),

$$q\cdot Cr - r\cdot Bq, \quad r\cdot Ap - p\cdot Cr, \quad p\cdot Bq - q\cdot Ap,$$

ou

$$(C-B)\,qr, \quad (A-C)\,rp, \quad (B-A)\,pq.$$

Égalons donc, en vertu du théorème rappelé, les composantes de la vitesse du point K parallèlement à $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, aux composantes de l'axe du couple résultant des forces extérieures; il viendra

$$(1)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = G_\xi, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)\,rp = G_\eta, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = G_\zeta. \end{cases}$$

Dans ces équations, dites *équations d'Euler*, n'entrent pas les réactions du point fixe, quoique ces réactions soient comprises parmi les forces extérieures; leurs moments relatifs à $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sont, en effet, constamment nuls.

202. Les équations (1) sont du premier ordre par rapport aux composantes p, q, r de l'axe instantané de rotation suivant les axes principaux d'inertie du solide relatifs au point fixe; si G_ξ, G_η, G_ζ sont donnés en fonction de p, q, r, t, l'intégration du système (1) fera connaître p, q, r, en fonction de t, avec trois constantes arbitraires que l'on

déterminera au moyen des composantes p_0, q_0, r_0 de la rotation initiale. Pour achever de tirer de là la position du solide à une époque quelconque, il faudra faire usage des équations données dans la cinématique (**29**) :

$$(2)\quad \begin{cases} p = -\sin\theta \sin\varphi \dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ q = \sin\theta \cos\varphi \dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ r = \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Substituant à p, q, r leurs valeurs déjà connues, on aura pour déterminer θ, ψ, φ en fonction du temps un système d'équations du premier ordre; les constantes arbitraires de l'intégration se détermineront par les données initiales θ_0, ψ_0, φ_0.

Toutefois, cette marche n'est plus applicable si G_ξ, G_η, G_ζ dépendent immédiatement de θ, ψ, φ, ou si les forces motrices dépendent de la position du solide, ce qui est le cas général. Il est clair qu'on ne peut plus alors intégrer le système (1) d'une manière indépendante : il faut éliminer p, q, r entre les équations (1) et (2), ce qui conduit, pour déterminer θ, ψ, φ, à trois équations du second ordre entre ces variables et le temps.

203. *Cas où l'axe* OG *est constamment nul.* — Le mouvement du solide présente des propriétés remarquables lorsque G_ξ, G_η, G_ζ sont nuls constamment, c'est-à-dire, lorsque les forces extérieures s'évanouissent ou donnent une résultante passant par le point fixe. Les équations (1) se réduisent aux suivantes :

$$(3)\quad A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0,\quad B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0,\quad C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0.$$

On trouve une première intégrale en multipliant ces équations respectivement par p, q, r et les ajoutant, ce qui donne

$$Apdp + Bqdq + Crdr = 0,$$

ou, en intégrant et désignant par h une constante,

$$(4)\qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Cette intégrale est celle des forces vives, car le moment d'inertie H du

solide par rapport à l'axe instantané OR est, d'après la formule (4) du chapitre XXVI,

$$\text{II} = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{\omega^2};$$

sa force vive actuelle est donc égale (**191**, 3°) à $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$, et doit être constante (**179**) puisqu'il n'y a pas de travail des forces extérieures.

Nous aurons une deuxième intégrale des équations (3) en les multipliant par Ap, Bq, Cr et les ajoutant : il viendra

$$A^2 p\,dp + B^2 q\,dq + C^2 r\,dr = 0,$$

et par l'intégration

$$(5) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$

k^2 étant une constante. Cette intégrale résulte immédiatement du théorème de *la conservation des moments*, qui nous apprend (**171**) qu'ici l'axe OK du couple résultant des quantités du mouvement relatif au point O est invariable en grandeur et en direction.

Avant de pousser plus loin la solution analytique du problème, déduisons des intégrales (4) et (5) diverses propriétés géométriques qui donneront une idée très-nette du mouvement.

204. L'équation de l'ellipsoïde central du solide relatif au point O, rapportée aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, est

$$(6) \qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1;$$

soit I le point (ξ, η, ζ) où l'axe instantané OR perce la surface de cet ellipsoïde; $OI = \rho$; I sera le *pôle instantané de rotation*. Les cosinus directeurs de la normale à l'ellipsoïde au point I sont proportionnels à $A\xi$, $B\eta$, $C\zeta$, ou, comme

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r},$$

à Ap, Bq, Cr, c'est-à-dire aux cosinus directeurs de l'axe OK des quantités de mouvement. De là ce théorème :

Si l'on mène à l'ellipsoïde central du solide, relatif au point fixe, un plan tangent perpendiculaire à l'axe OK *du couple résultant des quantités de mouvement, le point de contact* I *sera le pôle instantané de rotation.*

On observera en outre que le plan diamétral conjugué de l'axe instantané OI est parallèle au plan tangent en I, donc il est perpendiculaire à OK; donc, *à chaque instant, l'axe instantané de rotation est le diamètre conjugué du plan du couple résultant des quantités de mouvement, dans l'ellipsoïde central.*

On sait aussi que la perpendiculaire ϖ abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan tangent au point (ξ, η, ζ) a pour expression

$$(7) \qquad \varpi = (A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, on voit sans peine que l'on a

$$\frac{\xi^2}{p^2} = \frac{\eta^2}{q^2} = \frac{\zeta^2}{r^2} = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{p^2 + q^2 + r^2} = \frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2} = \frac{A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2}{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}.$$

Ces deux dernières équations se réduisent, par les formules (4), (5), (6), (7), à celles-ci :

$$\frac{\rho^2}{\omega^2} = \frac{1}{h} = \frac{1}{\varpi^2 k^2}.$$

De là

$$\omega = \rho\sqrt{h}, \qquad \varpi = \frac{\sqrt{h}}{k},$$

et comme h, k sont constants : 1° *La vitesse angulaire* ω *de la rotation instantanée du solide est proportionnelle au rayon de l'ellipsoïde central autour duquel elle s'effectue;* 2° *le plan qui touche l'ellipsoïde central au pôle instantané* I *est à une distance constante du point fixe* O; *comme il est d'ailleurs perpendiculaire à l'axe fixe* OK, *il est clair que ce plan est un plan fixe*; 3° si ε désigne l'angle IOK compris entre l'axe instantané OI est l'axe OK du couple résultant, on a évidemment

$$\varpi = \rho \cos \varepsilon,$$

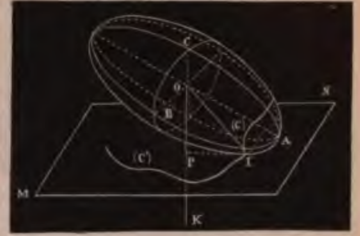
d'où, multipliant les deux membres par $\sqrt{h}$ et ayant égard à ce qui précède,

$$\omega \cos \varepsilon = \frac{h}{k}.$$

Ainsi *la projection de l'axe de la rotation instantanée sur l'axe des quantités de mouvement a une valeur constante.*

Ces théorèmes donnent une image nette du mouvement. Concevons que l'on prenne sur l'axe OK, à partir du point fixe O, une longueur OP

égale $\sqrt{h} : k$, que l'on mène par le point P un plan MN perpendiculaire à l'axe OK : ce plan fixe touchera l'ellipsoïde central du solide, relatif au point O, pendant toute la durée du mouvement, et le point de contact I sera, à chaque instant, le pôle actuel de la rotation instantanée du solide. Sa vitesse actuelle sera donc nulle, en sorte que *l'ellipsoïde central ne fera que pirouetter sur le plan fixe normal à OK, sans aucun glissement.*



205. Pour éclaircir davantage encore cette solution, déterminons, d'abord sur l'ellipsoïde central, le lieu (C) des positions successives du pôle instantané. La distance OP du centre de l'ellipsoïde au plan tangent en I étant égale à $\sqrt{h} : k$, chaque point de la courbe (C) vérifie à la fois l'équation

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = \frac{k^2}{h},$$

et celle de l'ellipsoïde central

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1.$$

Ces deux équations déterminent donc le lieu cherché; on peut substituer à l'une d'elles celle que l'on obtient en retranchant de la première, multipliée par h, la seconde multipliée par k^2 :

$$A(Ah - k^2)\xi^2 + B(Bh - k^2)\eta^2 + C(Ch - k^2)\zeta^2 = 0.$$

Cette équation représente un cône du second degré, ayant pour sommet O, pour axes les axes principaux d'inertie du solide relatifs au point O; son intersection par l'ellipsoïde est une courbe du quatrième ordre, symétrique par rapport aux plans principaux, et qui est le lieu (C) du pôle instantané sur l'ellipsoïde. Le cône lui-même est donc le lieu de l'axe instantané de rotation *dans le solide.*

Supposons $A < B < C$; à cause de la relation $k\varpi = \sqrt{h}$, les équations de l'ellipsoïde et du cône peuvent s'écrire

(C) $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,\quad A(A\varpi^2 - 1)\xi^2 + B(B\varpi^2 - 1)\eta^2 + C(C\varpi^2 - 1)\zeta^2 = 0.$

Il est clair que l'on a toujours

$$A\varpi^2 \leqq 1,\qquad C\varpi^2 \geqq 1,$$

mais on peut avoir $B\varpi^2 > 1$, $= 1$, < 1. Donc, dans l'équation du cône, les coefficients de ξ^2, ζ^2 sont toujours, le premier négatif, le dernier positif; celui de η^2 peut être positif ou négatif. Dans le premier cas, $B\varpi^2 > 1$, les sections elliptiques du cône sont perpendiculaires à l'axe $O\xi$; donc *le cône, lieu de l'axe instantané, entoure alors l'axe du plus petit moment d'inertie.*

Dans le second cas, $B\varpi^2 < 1$, le coefficient de η^2 est négatif, les sections elliptiques du cône sont perpendiculaires à $O\zeta$, *le cône entoure donc l'axe du plus grand moment d'inertie.*

Enfin, si l'on avait $B\varpi^2 = 1$, l'équation du cône se réduirait à

$$A(A - B)\xi^2 + C(C - B)\zeta^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\xi}{\zeta} = \pm\sqrt{\frac{C(C - B)}{A(B - A)}}.$$

Cette équation représente deux plans, passant par l'axe $O\eta$, axe moyen de l'ellipsoïde central, et également inclinés de part et d'autre sur le plan principal $\eta\zeta$. Dans ce cas singulier, la courbe (C) que parcourt le pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde se compose de deux ellipses.

Lorsque l'on a, comme cas extrême, $A\varpi^2 = 1$ ou $C\varpi^2 = 1$, l'équation du cône ne peut plus être vérifiée que par ($\eta = 0$, $\zeta = 0$), ou par ($\xi = 0$, $\eta = 0$); le cône, lieu de l'axe instantané dans le solide, se réduit donc à une droite qui est, dans le premier cas, l'axe majeur de l'ellipsoïde; dans le second, l'axe mineur. Dans chacun de ces cas le solide tourne autour d'un axe principal d'inertie qui reste fixe, ce qui est conforme à un théorème déjà démontré (**200**).

Il existe, au point de vue de la *stabilité* de l'axe de rotation, des différences remarquables entre les divers cas que nous venons d'examiner. Nous n'entrerons pas dans cette discussion (1).

206. Nous connaissons le cône qui est le lieu de l'axe instantané dans le solide; il reste à étudier celui que décrit l'axe instantané dans l'espace. Pour cela, observons que, tandis que l'ellipsoïde central du corps pirouette sur le plan fixe MN, tous les points de la courbe (C) que nous avons déterminée sur cet ellipsoïde viennent successivement tomber sur le plan MN et coïncider, à cet instant, avec le pôle instantané

(1) Voir Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, in-8°, pp. 71-74; Bour, *Cours de Mécanique et machines*, 3me fascicule, pp. 154-166.

de rotation. Le lieu (C′) de ces points de contact, considéré sur le plan fixe MN, est donc le lieu du pôle instantané dans l'espace, et le cône qui a pour base cette courbe (C′) et pour sommet le point fixe O, est le lieu de l'axe instantané de rotation OR dans l'espace. Comme, d'après les équations (C), la courbe (C) est évidemment une courbe fermée, symétrique par rapport à deux plans principaux de l'ellipsoïde, et dont le rayon vecteur OI oscille entre un maximum et un minimum déterminés; que les rayons vecteurs appartenant aux points qui se correspondent sur les courbes (C) et (C′) sont égaux deux-à-deux, de même que les arcs des deux courbes compris entre ces points, on voit, sans former l'équation de la courbe (C′), qu'elle se compose d'une suite d'ondulations régulières s'approchant et s'éloignant alternativement du point P, projection du point fixe O sur le plan MN. Le cône, lieu de l'axe instantané, est donc une surface cannelée dont la génératrice fait, avec l'axe OK du couple résultant, un angle constamment variable entre deux limites déterminées.

Quoique les courbes (C) et (C′) soient très-différentes l'une de l'autre, il est clair que si l'on établit, pour chacune d'elles, son équation entre le rayon vecteur ρ mené du point fixe O, et l'arc σ compté d'un point donné de la courbe, cette équation sera la même pour les deux courbes.

Enfin, après avoir ainsi déterminé les deux cônes (O, C), (O, C′) qui sont respectivement les lieux de l'axe instantané dans le solide mobile et dans l'espace, il suffira, comme on l'a établi dans la cinématique (**25**), de faire rouler le premier cône sur le second, de telle manière que la vitesse angulaire de la rotation soit à chaque instant proportionnelle à la longueur OI, pour reproduire exactement le mouvement du solide fixé par le point O, en l'absence de forces extérieures.

207. Reprenons la solution analytique de la question, ou la détermination de p, q, r, θ, ψ, φ en fonction de t. Multipliant les équations (3) respectivement par BCp, CAq, ABr et les ajoutant; observant de plus que l'on a

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2, \quad pdp + qdq + rdr = \omega d\omega,$$
$$BC(C - B) + CA(A - C) + AB(B - A) = (B - C)(C - A)(A - B),$$

on trouve l'équation

$$(8) \qquad ABC\omega\frac{d\omega}{dt} + (B - C)(C - A)(A - B)pqr = 0.$$

On exprimera p, q, r en fonction de ω au moyen des équations

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2, \quad p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2.$$

Multipliant ces équations respectivement par $-(B+C)$, 1, BC, et ajoutant, on obtient

$$(A-B)(A-C)p^2 = k^2 - (B+C)h + BC\omega^2.$$

On opère de la même manière pour isoler q^2, r^2, et en posant

$$(B+C)h - k^2 = BC\lambda^2, \quad (C+A)h - k^2 = CA\mu^2, \quad (A+B)h - k^2 = AB\nu^2$$

on a les trois égalités

$$(9) \quad \begin{cases} (A-B)(A-C)p^2 = BC(\omega^2-\lambda^2), \\ (B-C)(B-A)q^2 = CA(\omega^2-\mu^2), \\ (C-A)(C-B)r^2 = AB(\omega^2-\nu^2), \end{cases}$$

d'où l'on tire p^2, q^2, r^2 en fonction de ω^2. Il importe d'observer que les quantités désignées par λ^2, μ^2, ν^2 sont essentiellement positives, car, à cause de la relation connue $h = k^2\varpi^2$, les égalités qui définissent ces quantités peuvent s'écrire

$$BC\lambda^2 = k^2[(B+C)\varpi^2 - 1], \quad CA\mu^2 = k^2[(C+A)\varpi^2 - 1],$$
$$AB\nu^2 = k^2[(A+B)\varpi^2 - 1].$$

Comme on l'a observé, $C\varpi^2 = \text{ou} > 1$, donc

$$(B+C)\varpi^2 - 1, \quad (C+A)\varpi^2 - 1$$

sont évidemment positifs. De plus, la même remarque donne

$$(A+B)\varpi^2 - 1 = \varpi^2\left(A+B-\frac{1}{\varpi^2}\right) \geqq \varpi^2(A+B-C).$$

Mais on a

$$A+B-C = \Sigma m(y^2+z^2) + \Sigma m(z^2+x^2) - \Sigma m(x^2+y^2) = 2\Sigma mz^2 > 0.$$

Donc enfin λ^2, μ^2, ν^2 sont positifs et λ, μ, ν réels. Les équations (9) montrent de plus, à cause de $A < B < C$, que

$$\omega^2 - \lambda^2 > 0, \quad \omega^2 - \mu^2 < 0, \quad \omega^2 - \nu^2 > 0.$$

Multipliant ces équations (9) membre à membre, on a

$$(B-C)^2(C-A)^2(A-B)^2p^2q^2r^2 = A^2B^2C^2(\omega^2-\lambda^2)(\mu^2-\omega^2)(\omega^2-\nu^2),$$

et en substituant dans l'équation (8),

$$(10) \quad dt = \pm\frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\omega^2-\lambda^2)(\mu^2-\omega^2)(\omega^2-\nu^2)}}.$$

Le temps s'exprime donc en fonction de la vitesse angulaire ω par une quadrature, qui se ramène évidemment aux intégrales elliptiques. De là

on déduit ω en fonction de t, et les équations (9) donnent ensuite p, q, r, en fonction de t.

Enfin, si l'on intègre les équations (2) après avoir remplacé p, q, r par leurs valeurs en fonction de t, on aura θ, ψ et φ, et la solution du problème sera complète [1].

208. Nous n'achèverons le calcul que pour le cas où deux moments principaux d'inertie sont égaux, soit

$$A = B,$$

l'ellipsoïde étant de révolution autour du troisième axe.

Posant $C - A = A\mu$, μ étant une constante positive, on aura par les équations (3)

$$(11) \qquad \frac{dp}{dt} + \mu q r = 0, \qquad \frac{dq}{dt} - \mu p r = 0, \qquad \frac{dr}{dt} = 0,$$

dont la dernière donne

$$r = \text{const.} = n,$$

n étant la composante initiale de l'axe instantané de rotation suivant l'axe $O\zeta$. Les intégrales (4) et (5) deviennent

$$A(p^2 + q^2) = h - Cn^2, \qquad A^2(p^2 + q^2) = k^2 - C^2n^2,$$

d'où

$$p^2 + q^2 = \text{const.} = m^2,$$

m désignant la projection de l'axe de la rotation initiale sur le plan $\xi\eta$.

On tire ensuite des équations (11), en substituant n à r et éliminant q,

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \mu n \frac{dq}{dt} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2p}{dt^2} + \mu^2 n^2 p = 0,$$

équation du second ordre dont l'intégrale générale est

$$p = \alpha \sin(\mu n t + \beta),$$

α, β étant deux constantes arbitraires à déterminer par les données initiales. Puis on déduit, de la première équation (11),

$$q = -\alpha \cos(\mu n t + \beta).$$

---

[1] Cette solution analytique complète au moyen des fonctions elliptiques sera exposée dans la seconde partie du cours.

La condition $p^2 + q^2 = m^2$ donne d'abord $\alpha = m$. Ensuite, faisant $t = 0$, on a

$$m \sin \beta = p_0, \quad m \cos \beta = -q_0,$$

ce qui détermine entièrement l'angle β. De plus, l'axe fixe OZ étant choisi comme on veut, on prendra pour OZ l'axe OK du couple résultant, qui est fixe, et observant que les projections de OK sur $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sont Ap, Aq, Cn (**191**), on aura

$$\cos \theta = \cos(\zeta, Z) = \frac{Cn}{k} = \frac{Cn}{\sqrt{A^2 m^2 + C^2 n^2}}.$$

L'angle θ étant constant, $d\theta$ est nul ; les valeurs de p, q données par les relations (2) deviennent

$$p = \sin \theta \sin \varphi \frac{d\psi}{dt}, \quad q = \sin \theta \cos \varphi \frac{d\psi}{dt},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{q} = -\operatorname{tg}(\mu n t + \beta), \quad \varphi = i\pi - (\mu n t + \beta),$$

i désignant un nombre entier quelconque. Enfin, la dernière des équations (2) donne

$$\cos \theta \frac{d\psi}{dt} = n - \frac{d\varphi}{dt} = n + \mu n = n(1 + \mu) = \frac{nC}{A},$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{nC}{A \cos \theta} = \frac{k}{A}, \quad \psi = \frac{kt}{A} + \psi_0.$$

Ainsi p, q, r, θ, ψ, φ sont connus, et le problème est résolu. On voit que *l'axe de révolution de l'ellipsoïde central fait un angle constant avec l'axe du couple résultant, et décrit un cône circulaire droit autour de* OK. *La vitesse angulaire de rotation*

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$$

est constante. La trace OX_1 *du plan de l'équateur de l'ellipsoïde sur le plan du couple résultant se meut d'un mouvement uniforme autour de l'axe* OK.

La courbe (C) *est ici un cercle*, l'angle que fait l'axe instantané avec $O\zeta$ étant constant puisque r et ω sont constants; *la courbe* (C') *est aussi un cercle*, puisque le lieu de l'axe instantané dans l'espace est un cône circu-

laire droit qui a pour axe OK. Le mouvement du solide résulte donc du roulement d'un cône circulaire sur un cône circulaire, et *l'axe fixe du couple résultant, l'axe instantané de rotation et l'axe de révolution de l'ellipsoïde central sont toujours dans un même plan.*

Exercices.

1. Lorsqu'un solide se meut autour d'un point fixe sans être soumis à l'action de forces extérieures, la somme des carrés des distances des sommets de l'ellipsoïde central à l'axe OK reste constante et égale à

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{h}{k^2}.$$

2. La somme des carrés de ces distances, respectivement multipliées par les moments principaux correspondants, est aussi constante et égale à 2.

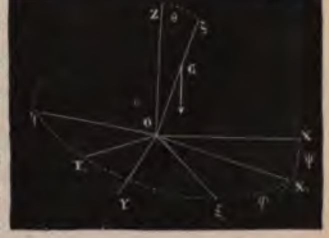
3. La somme des carrés des inverses des distances comprises entre le point fixe et les points où les axes principaux rencontrent le plan tangent au pôle instantané, est constante et égale à $1 : \varpi^2$.

4. L'aire de l'ellipse variable, intersection de l'ellipsoïde central par le plan du couple résultant, est invariable pendant toute la durée du mouvement.

CHAPITRE XXIX.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE DE RÉVOLUTION FIXÉ PAR UN POINT DE SON AXE DE FIGURE.

209. Considérons un solide de révolution homogène, fixé par un point O de son axe de figure, et soumis uniquement à l'action de la pesanteur. Le centre de gravité G est sur l'axe de révolution, au-dessus ou au-dessous du point O : si ces deux points coïncidaient, on retomberait sur le cas, déjà étudié, où il n'y a pas de forces motrices.



Prenons l'axe fixe OZ vertical, en sens contraire de la pesanteur; l'axe mobile Oζ dirigé suivant la partie de l'axe de révolution qui fait un angle aigu avec OZ à l'instant initial. Soient M la masse

du solide, l la distance OG, affectée du signe + ou — suivant que G tombe sur $O\zeta$ ou sur son prolongement ; C le moment d'inertie du solide relatif à l'axe principal $O\zeta$, $A = B$ le moment relatif à un axe quelconque passant par O dans le plan $\xi\eta$, l'ellipsoïde central étant de révolution autour de $O\zeta$; enfin, nous désignerons par θ', ψ', φ' les dérivées $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$. La seule force motrice est le poids $P = Mg$ du solide, agissant verticalement au centre de gravité. Pour trouver les équations du mouvement, nous emploierons la troisième équation d'Euler, le théorème des forces vives et le théorème des moments.

1° L'axe du couple qui résulte de la force motrice transportée à l'origine est dirigé suivant OX_1, d'après les conventions établies aux N^{os} **29** et **79** ; sa projection G_ζ sur $O\zeta$ est donc nulle. La troisième équation (1) du chapitre précédent se réduit donc, à cause de $A = B$, à

$$C\frac{dr}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \qquad r = \text{const.} = n$$

n désignant la composante initiale de la rotation du solide suivant $O\zeta$. La troisième des équations (2) devient donc

$$(1) \qquad \psi' \cos\theta + \varphi' = n.$$

2° Les équations (2) du chapitre précédent donnent encore

$$(2) \qquad p\cos\varphi - q\sin\varphi = \theta', \quad p\sin\varphi + q\cos\varphi = \psi'\sin\theta.$$

Or, on voit sans peine que les premiers membres représentent les composantes de l'axe instantané suivant la trace OX_1 de $\xi\eta$ sur XY, et suivant la perpendiculaire OY_1 à cette trace menée dans le plan $\xi\eta$. OX_1, OY_1 et $O\zeta$ étant des axes principaux relatifs au point O, la force vive totale du solide à l'instant considéré est (**203**)

$$A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) + Cn^2.$$

D'autre part, la somme des travaux des forces extérieures depuis l'époque $t = 0$ se réduit au travail du poids P, c'est-à-dire, si nous désignons par α la valeur de θ pour $t = 0$, à

$$Mgl(\cos\alpha - \cos\theta),$$

d'après le théorème du N° **177**. Le théorème des forces vives donne donc l'équation

$$(3) \qquad A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) = 2Mgl(\cos\alpha - \cos\theta) + h,$$

h désignant une constante facile à déterminer par les données initiales.

3° Enfin, l'axe du couple moteur est encore normal à l'axe fixe OZ; donc, d'après un théorème connu (**171**), la somme des moments des quantités de mouvement du solide par rapport à OZ reste invariable. Les moments par rapport aux axes principaux OX_1, OY_1, $O\zeta$ étant (**191**, 2°) $A\theta'$, $A\psi'\sin\theta$, Cn, les cosinus des angles que font ces axes avec OZ étant o, $\sin\theta$, $\cos\theta$, on a, pour la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à OZ,

$$A\psi'\sin^2\theta + Cn\cos\theta = k, \tag{4}$$

k étant une constante déterminée par les données initiales.

Les équations (1), (3), (4) sont du premier ordre entre les variables θ, φ, ψ et le temps, et déterminent ces fonctions, par conséquent la position et la rotation du solide à un instant quelconque[1].

210. Examinons en particulier le cas où le solide, ayant reçu une rotation initiale énergique n autour de son axe de figure, est abandonné à l'action de la pesanteur. Les valeurs de p_0, q_0 étant nulles, θ'_0 et ψ'_0 sont nuls aussi. Les équations (1), (3) et (4) deviennent

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi' + \psi'\cos\theta = n, \\ A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) = 2Mgl(\cos\alpha - \cos\theta), \\ A\psi'\sin^2\theta = Cn(\cos\alpha - \cos\theta). \end{array}\right.$$

Sans intégrer ces équations, on en déduit diverses conséquences remarquables. La deuxième a son premier membre $>$o, donc l et $(\cos\alpha - \cos\theta)$ sont de même signe. Donc, *si dans l'état initial le centre de gravité est au-dessus du point fixe* ($l>0$), on aura $\cos\alpha > \cos\theta$ ou $\theta > \alpha$, *l'axe de figure* $O\zeta$ *fera constamment avec la verticale OZ un angle* θ *plus grand que sa valeur initiale* α. Si au contraire, pour $t = 0$, on a $l<0$ ou le point G plus bas que le point fixe, $\cos\alpha - \cos\theta$ sera $<$o ou $\theta<\alpha$, *l'axe de figure fera avec OZ un angle constamment plus petit qu'à l'époque* $t = 0$.

La troisième équation montre que ψ' est de même signe que le produit $n(\cos\alpha - \cos\theta)$. Donc, si $l>0$, comme alors on a $\cos\alpha - \cos\theta > 0$, ψ' et n sont de même signe, le sens de la rotation de la trace OX_1 autour

---

[1] La solution complète de ce problème au moyen des fonctions elliptiques rentre dans la seconde partie de ce cours.

de OZ est le même que celui de la rotation initiale du solide autour de $O\zeta$. Si, au contraire, l est < 0, $\cos\alpha - \cos\theta$ est négatif et ψ', n sont de signes contraires. On nomme *mouvement de précession* du solide, par un emprunt fait à l'astronomie, le mouvement de la trace OX_1 ou du plan vertical ZOX_1 autour de OZ. On peut donc dire que *le mouvement de précession est de même sens que le mouvement initial de rotation autour de l'axe de figure, ou de sens contraire, suivant que le centre de gravité G est plus haut ou plus bas que le point fixe à l'instant initial.*

211. Éliminant ψ' entre les deux dernières équations (5), nous aurons

$$\theta'^2 = \frac{2Mgl}{A}(\cos\alpha - \cos\theta) - \frac{C^2n^2}{A^2}\frac{(\cos\alpha - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta},$$

d'où

$$(6)\qquad \frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{1}{A}\sqrt{(\cos\alpha - \cos\theta)\left(2MAgl - C^2n^2\frac{\cos\alpha - \cos\theta}{\sin^2\theta}\right)}.$$

Le double signe montre que l'angle θ peut croître ou décroître lorsque t augmente. Pour fixer les idées, admettons que l soit positif, et que l'on ait, par suite, $\cos\alpha - \cos\theta > 0$, $\theta > \alpha$. L'angle θ est donc d'abord croissant, $d\theta > 0$, il faut prendre le signe + devant le radical et le conserver aussi longtemps que θ n'atteint pas une valeur qui fasse évanouir la quantité sous le radical, car θ', fonction continue de θ, ne change de signe qu'en passant par zéro. L'angle θ est donc croissant jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur β, pour laquelle l'expression

$$2MAgl\sin^2\theta - C^2n^2(\cos\alpha - \cos\theta)$$

s'évanouit, valeur qui existe évidemment, puisque cette expression admet des signes contraires pour $\theta = \alpha$ et pour $\theta = \pi$. Soit T le temps que θ met à acquérir cette valeur.

Passé le temps où $\theta = \beta$, l'angle θ diminue, car si θ continuait à croître, le second facteur sous le radical deviendrait négatif, et comme le premier, $\cos\alpha - \cos\theta$, reste positif, θ' serait imaginaire. Donc θ' devient négatif, θ est décroissant, se rapproche de sa valeur initiale α, et l'atteint au bout d'un temps égal à T, car l'équation (6) donne pour dt une valeur qui dépend uniquement de θ et $d\theta$.

Lorsque $\theta = \alpha$, θ' s'évanouit et change de nouveau de signe, l'angle θ croît de nouveau de $\theta = \alpha$ à $\theta = \beta$ dans un temps T, et ainsi de suite indéfiniment. *L'angle θ varie donc entre sa valeur minimum α et sa*

valeur maximum β; l'axe de figure Oζ exécute des oscillations isochrones, d'amplitude constante, dans le plan vertical ZOζ tournant autour de la verticale OZ. Ce mouvement oscillatoire de l'axe Oζ se nomme *mouvement de nutation.*

La durée T d'une demi-oscillation de l'axe est donnée par l'équation

$$T = A\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(\cos\alpha - \cos\theta)\,[2MAgl\sin^2\theta - C^2n^2(\cos\alpha - \cos\theta)]}},$$

et dépend d'une quadrature elliptique.

La dernière équation (5) montre que ψ', ou la vitesse angulaire de la trace OX_1, est fonction de θ seul, et varie ainsi périodiquement avec θ; elle est nulle pour $\theta = \alpha$, et reste toujours de même signe que n. On voit donc que le plan ZOζ tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire alternativement croissante et décroissante, mais toujours dans le même sens.

La vitesse angulaire de la rotation instantanée étant donnée par l'équation

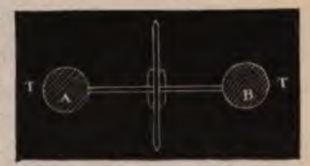
$$\omega^2 = n^2 + \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta,$$

on a, par la deuxième équation (5),

$$A\omega^2 = An^2 + 2Mgl(\cos\alpha - \cos\theta),$$

ce qui montre que la vitesse ω varie périodiquement entre son minimum n qui répond à $\theta = \alpha$, et son maximum, qui a lieu pour $\theta = \beta$.

212. Pour se faire une idée plus nette des phénomènes, il suffira d'étudier complétement le cas où la vitesse initiale n est extrêmement grande, et où le rapport C : A a une valeur aussi grande que possible, ce que l'on obtient en prenant pour solide tournant un tore en bronze TT dont le diamètre AB est assez grand par rapport à la section méridienne.



L'expression

$$2MAgl\sin^2\theta - C^2n^2(\cos\alpha - \cos\theta)$$

qui est d'abord positive pour $t = 0$ ou $\theta = \alpha$, puisqu'elle se réduit à $2MAgl$, s'évanouit aussitôt que θ dépasse α d'une très-petite quantité, car, dès que $\cos\alpha - \cos\theta$ acquiert une valeur sensible, à cause du facteur C^2n^2 dont la valeur est très-grande, le second terme égale le premier et le détruit. Donc, la limite supérieure β de l'angle θ diffère

très-peu de α, et comme θ reste toujours compris entre β et α, il reste lui-même toujours très-voisin de α. On voit même que l'on peut supposer n suffisamment grand, toutes choses égales d'ailleurs, pour que la différence $\theta - \alpha$ reste toujours aussi petite qu'on le veut. Nous poserons donc

$$\theta = \alpha + u,$$

u désignant une quantité très-petite dont nous négligerons le carré, sauf quand il sera multiplié par un facteur de même ordre que n. De là

$$\cos\theta = \cos(\alpha + u) = \cos\alpha\left(1 - \frac{u^2}{1\cdot 2} + \cdots\right) - \sin\alpha\left(u - \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right)$$

$$= \cos\alpha - u\sin\alpha, \quad \cos\alpha - \cos\theta = u\sin\alpha, \quad d\theta = du,$$

et l'équation (6) devient

$$\frac{du}{dt} = \pm\frac{1}{A}\sqrt{u\sin\alpha\left[2\mathrm{MA}gl - \frac{C^2n^2u\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+u)}\right]},$$

ou, en continuant à négliger les puissances plus élevées de u,

$$\frac{du}{dt} = \pm\frac{1}{A}\sqrt{2\mathrm{MA}gl\,u\sin\alpha - C^2n^2u^2}.$$

Posons

$$u_1 = \frac{\mathrm{MA}gl\sin\alpha}{C^2n^2}, \quad K = \frac{Cn}{A},$$

u_1 ayant donc une très-petite valeur et k une très-grande.

Nous aurons successivement

$$\pm k\,dt = \frac{du}{\sqrt{2u_1u - u^2}} = \frac{du}{\sqrt{u_1^2 - (u_1 - u)^2}} = -\frac{d(u_1 - u)}{\sqrt{u_1^2 - (u_1 - u)^2}},$$

$$\pm kt = \arccos\frac{u_1 - u}{u_1},$$

la constante de l'intégration étant nulle puisque pour $t = 0$ on a $u = 0$, $\arccos 1 = 0$. De là on tire

$$u_1 - u = u_1\cos kt, \quad u = u_1(1 - \cos kt),$$

et enfin

$$(7) \qquad \theta = \alpha + u_1(1 - \cos kt).$$

On déduit ensuite de la dernière équation (5), en négligeant encore les termes d'un ordre supérieur,

$$\psi' = \frac{Cn}{A} \frac{\cos\alpha - \cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{ku \sin\alpha}{\sin^2(\alpha + u)} = \frac{ku}{\sin\alpha},$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{ku_1}{\sin\alpha}(1 - \cos kt).$$

Intégrons, et supposons qu'on ait choisi l'axe OX de manière que ψ s'annule pour $t = 0$; nous aurons

$$\psi = \frac{ku_1 t}{\sin\alpha} - \frac{u_1}{\sin\alpha}\sin kt,$$

ou

$$(8) \qquad \psi = \frac{Mgl}{Cn}t - \frac{MAgl}{C^2n^2}\sin kt.$$

Enfin, la première des équations (5) nous donnera

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \psi' \cos(\alpha + u) = n - \frac{ku}{\sin\alpha}\cos(\alpha + u) = n - ku \cot\alpha,$$

au même degré d'approximation. Remplaçant u par sa valeur en t, intégrant et supposant $O\xi$ choisi de manière que pour $t = 0$ on ait $\varphi = 0$, on trouve

$$\varphi = nt - ku_1 \cot\alpha \cdot t + u_1 \cot\alpha \sin kt,$$

ou encore

$$(9) \qquad \varphi = nt - \frac{Mgl\cos\alpha}{Cn}t + \frac{MAgl\cos\alpha}{C^2n^2}\sin kt.$$

218. Les formules (7), (8), (9) donnent θ, ψ, φ en fonction du temps et définissent complètement le mouvement du solide.

L'angle θ, inclinaison de l'axe de figure du solide sur la verticale OZ, varie périodiquement entre sa valeur initiale α et la valeur $\alpha + 2u_1$, qui est plus grande que α vu que u_1 est > 0, car nous avons supposé l positif. La quantité u_1 étant très-petite, la variation de θ est très-faible et l'oscillation de l'axe presqu'insensible : l'axe de figure paraît décrire un cône de révolution autour de la droite OZ. La durée de l'oscillation de l'axe est, d'après (7),

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi A}{Cn}.$$

C'est aussi une quantité très-petite.

La valeur de l'angle ψ se compose de deux termes, le premier proportionnel au temps, le second périodique. Les coefficients constants de ces deux termes sont très-petits, mais le second est beaucoup plus petit que le premier, car il renferme n^2 au dénominateur. Si l'on néglige d'abord ce terme périodique, on a simplement

$$\psi = \frac{Mgl}{Cn} t,$$

c'est-à-dire que le mouvement *moyen* du plan $ZO\zeta$ ou mouvement moyen de précession est une rotation uniforme autour de OZ, avec une faible vitesse angulaire $Mgl : Cn$. Cette vitesse est d'ailleurs de même signe que n, l étant > 0; le mouvement de précession change donc de sens avec la rotation initiale autour de $O\zeta$.

Le terme périodique, dans la valeur de ψ donnée par l'équation (8), introduit dans le mouvement de précession une petite variation périodique, qui alternativement augmente et diminue d'une très-petite quantité l'angle ψ qui définit le mouvement moyen.

Enfin, la valeur de φ que fournit l'équation (9) comprend trois termes; l'un proportionnel au temps, nt, dont la valeur croît très-rapidement à cause de la grande valeur que nous avons attribuée à n; le deuxième, qui croît aussi proportionnellement au temps, mais dont le coefficient est très-petit; le dernier enfin, qui est périodique et dont la valeur est beaucoup plus petite encore. Si l'on néglige ce dernier terme, on voit donc que la ligne $O\xi$ de l'équateur du solide se meut dans le plan $\xi\eta$ avec une vitesse très-considérable, sensiblement uniforme, dans le sens de la rotation initiale imprimée au solide autour de $O\xi$.

Pour obtenir une représentation géométrique claire du mouvement de l'axe de figure du solide, on décrira du centre O une sphère de rayon égal à l'unité; on appellera *pôle moyen* le point P' où cette surface est percée par *l'axe moyen* dont le mouvement est défini par les équations

$$\theta = \alpha + u_1, \quad \psi = \frac{Mgl}{Cn} t;$$

le *pôle vrai* sera le point P où l'axe de figure réel, dont le mouvement est défini par les formules (7) et (8), traverse la surface sphérique. On verra sans peine que, tandis que P' décrit sur la sphère d'un mouvement uniforme, un cercle dont OZ est l'axe, dans le sens de la rotation

n, le pôle vrai P décrit autour de P′ un très-petit cercle, aussi d'un mouvement uniforme.

Nous avons développé cette solution en admettant que l soit > 0; mais la méthode resterait la même et les équations (5), (6), (7), (8), (9) subsisteraient, si l était négatif. Le changement de signe de l entraînant celui de u_1, l'angle θ aurait pour maximum α, pour minimum $\alpha + 2u_1$; le mouvement de précession deviendrait de sens contraire au mouvement de rotation n, etc.

214. Les résultats précédents se vérifient au moyen des divers *gyroscopes*, et en particulier au moyen de l'appareil de M. Robert. L'axe d'acier $O\zeta$, terminé en pointes à ses extrémités, s'appuie par l'une d'elles O dans le fond d'un godet creusé au sommet d'une colonne de cuivre C. Cet axe porte un anneau en bronze T, fixé de telle manière qu'une bague B, en glissant sur l'axe, peut porter à volonté le centre de gravité de la masse au-dessus du point d'appui O, ou au-dessous, ou en ce point même. L'axe étant d'abord maintenu verticalement, on imprime à l'anneau au moyen d'une ficelle un mouvement de rotation très-rapide; puis, après avoir donné à l'axe une position inclinée, on abandonne le solide tournant à l'action de la pesanteur. On voit alors se produire le phénomène de la précession dans le sens indiqué par nos formules, et qui dépend à la fois du sens de la rotation initiale et de la position du centre de gravité. La nutation est très-faible, comme les formules l'indiquent, tant que la vitesse de rotation est très-grande, et il faut quelqu'attention pour l'apercevoir.



L'action de la pesanteur sur le corps ne produit donc plus son effet naturel, qui serait de renverser l'axe autour du point O, dans un sens ou dans l'autre selon la position du centre de gravité, mais elle détermine au contraire le mouvement conique de l'axe de figure autour de la verticale.

215. Les solides de révolution tournant avec une grande vitesse autour de leur axe de figure et fixés par un point de cet axe présentent des effets remarquables, dont la théorie est comprise dans les formules générales du chapitre précédent.

Considérons un semblable solide tournant rapidement autour de son axe $O\zeta$, et concevons qu'on lui applique une force quelconque P en un

point C de cet axe. Conservons les mêmes notations que précédemment; appelons a la distance OC; X_1, Y_1, les composantes de P parallèlement à la trace OX_1 et à sa perpendiculaire OY_1 dans le plan $\xi\eta$; et pour nous débarrasser de l'influence de la pesanteur, admettons que le centre de gravité du corps coïncide avec le point O. Le moment de P par rapport à $O\zeta$ étant nul, ainsi que $B - A$, la troisième équation d'Euler donne toujours $r = n$, n étant la vitesse initiale imprimée au solide autour de $O\zeta$. Pour obtenir les deux autres équations du mouvement, appliquons encore le théorème du N° **170**, mais en projetant l'axe du couple des quantités de mouvement et l'axe du couple des forces extérieures sur les axes OX_1, OY_1, *qui ne sont pas liés au solide*, mais qui sont, à chaque instant, des axes principaux d'inertie relatifs au point O. En raisonnant comme au N° **201**, puisque les projections de l'axe instantané du solide sur OX_1, OY_1, $O\zeta$ sont égales (**209**) à θ', $\psi' \sin\theta$, n, on trouve pour les projections de l'axe OK



$$A\theta', \quad A\psi' \sin\theta, \quad Cn,$$

et les composantes de la vitesse *relative* du point K parallèlement à OX_1, OY_1 seront

$$A\frac{d\theta'}{dt}, \quad A\frac{d(\psi' \sin\theta)}{dt}.$$

Pour calculer les composantes de sa vitesse d'entrainement, observons que le mouvement du système mobile $OX_1Y_1\zeta$ se compose d'une rotation autour de OX_1 avec une vitesse angulaire θ', et d'une rotation autour de OZ avec la vitesse ψ'; les projections de l'axe instantané du système $OX_1Y_1\zeta$ sur OX_1, OY_1, $O\zeta$ sont donc

$$\theta', \quad \psi' \sin\theta, \quad \psi' \cos\theta,$$

et l'application des formules du N° **17** donne, pour les composantes de la vitesse d'entraînement du point K parallèlement à OX_1, OY_1,

$$\psi' \sin\theta \cdot Cn - \psi' \cos\theta \cdot A\psi' \sin\theta, \quad \psi' \cos\theta \cdot A\theta' - \theta' \cdot Cn.$$

On aura donc, pour les projections de la vitesse absolue du point K sur OX_1, OY_1,

$$A\frac{d\theta'}{dt} + (Cn - A\psi' \cos\theta)\,\psi' \sin\theta, \quad A\frac{d(\psi' \sin\theta)}{dt} + A\psi'\theta' \cos\theta - Cn\theta'.$$

Ces projections sont respectivement égales aux moments de la force P par rapport à ces axes, savoir $-aY_1$, aX_1, d'où les deux équations demandées

$$(10)\quad \begin{cases} A\dfrac{d\theta'}{dt} + (Cn - A\psi'\cos\theta)\psi'\sin\theta = -aY_1, \\ A\sin\theta\dfrac{d\psi'}{dt} + 2A\psi'\theta'\cos\theta - Cn\theta' = aX_1. \end{cases}$$

On arriverait aux mêmes équations en éliminant p, q, r entre les équations (1) et (2) du chapitre précédent, dans l'hypothèse $r = n$.

216. Les équations (10) se prêtent à la solution de nombreuses questions, entr'autres celle du N° **209**. Mais nous nous bornerons ici à en tirer l'explication des paradoxes principaux que nous avons en vue. Supposons que le rapport $Cn : A$ ait une valeur très-considérable, comme c'est le cas pour un tore en bronze auquel on a imprimé une rotation excessivement rapide autour de son axe de figure. Écartons aussi les cas où θ', ψ', $\dfrac{d\theta'}{dt}$, $\dfrac{d\psi'}{dt}$ pourraient acquérir des valeurs très-grandes. Les équations (10), divisées par Cn, montrent alors que ψ' et θ' ne peuvent être que des quantités fort petites, de l'ordre de $1 : Cn$. On y négligera donc les termes en ψ'^2, $\psi'\theta'$; de plus, si l'on ne tient pas compte dans θ' et ψ', des petites variations périodiques, ce qui revient à substituer à l'axe de figure un axe moyen dont l'axe vrai ne s'écarte jamais que par des oscillations insensibles, on reconnait que les dérivées de θ' et ψ' par rapport au temps sont elles-mêmes très-petites, en sorte que leurs quotients par Cn sont aussi négligeables. Ces équations se réduisent alors à celles-ci :

$$(11)\qquad \psi' = -\frac{aY_1}{Cn\sin\theta}, \qquad \theta' = -\frac{aX_1}{Cn}.$$

Ces équations permettent de calculer par approximation ψ', θ', pour l'axe moyen, si X_1 et Y_1 sont donnés, et réciproquement.

1° Si l'on suppose $X_1 = 0$, θ' est nul, θ est donc constant, l'axe de figure du solide a un mouvement conique uniforme autour de la droite fixe OZ.

Si, au contraire, on fait $Y_1 = 0$, ψ' est nul, l'axe de figure $O\zeta$ se meut donc dans un plan fixe $ZO\zeta$ perpendiculaire à la direction de la force motrice X_1, avec une vitesse angulaire θ' donnée par la seconde équation (11). Si X_1 est > 0, ou si la force agit dans le sens OX_1, θ' sera de

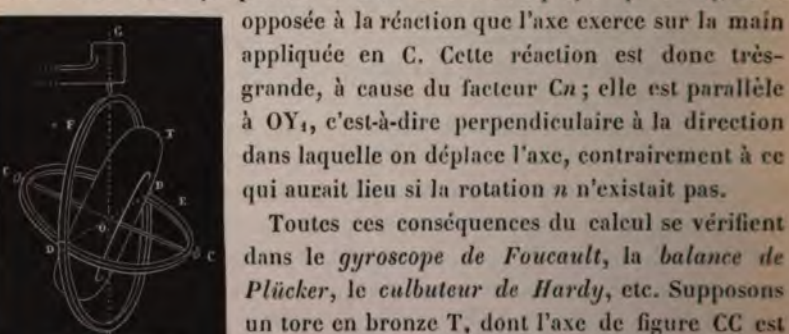
signe contraire à n, l'axe $O\zeta$ se rapprochera de OZ ou s'en éloignera suivant que la rotation du solide autour de $O\zeta$ aura lieu de gauche à droite ou de droite à gauche. L'inverse aurait lieu si la force motrice X_1 était dirigée en sens contraire de OX_1. Remarquons maintenant que la force X_1, appliquée sur l'axe $O\zeta$, tend à donner au solide une rotation dont l'axe est dirigé suivant OY_1 ou son prolongement selon que X_1 est positif ou négatif. On peut donc formuler toutes les circonstances du mouvement produit par cette force X_1 dans ce théorème :

Lorsqu'un solide de révolution, fixé par un point de son axe, tourne avec une grande rapidité autour de cet axe, si l'on applique sur celui-ci une force de direction constante, la rotation que cette force produirait sur le solide en repos ne se produit pas, mais l'axe de figure du tore se porte par le plus court chemin vers l'axe de la rotation que la force tend à produire, comme si les deux rotations tendaient à se faire autour d'une même droite et dans le même sens. C'est là ce qu'on nomme *la tendance au parallélisme des axes de rotation.*

2° Supposons maintenant que, sous l'action de la main, l'axe de figure du tore décrive, d'un mouvement uniforme, un cône de révolution autour de l'axe OZ. On aura $\theta' = 0$, θ étant constant; d'où $X_1 = 0$. La première des équations (11) donnera

$$Y_1 = -\frac{Cn\psi' \sin\theta}{a}.$$

Telle est la force qui produit le mouvement conique, et qui est égale et opposée à la réaction que l'axe exerce sur la main appliquée en C. Cette réaction est donc très-grande, à cause du facteur Cn; elle est parallèle à OY_1, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction dans laquelle on déplace l'axe, contrairement à ce qui aurait lieu si la rotation n n'existait pas.



Toutes ces conséquences du calcul se vérifient dans le *gyroscope de Foucault*, la *balance de Plücker*, le *culbuteur de Hardy*, etc. Supposons un tore en bronze T, dont l'axe de figure CC est monté sur un anneau E, mobile lui-même autour d'un axe DD perpendiculaire au premier, et porté par un deuxième anneau F qui peut tourner autour d'un axe GG perpendiculaire à DD. On voit que l'axe du tore peut ainsi prendre toutes les directions

autour du point O, intersection des trois axes, qui seul reste fixe. Après avoir imprimé au tore une rotation très-rapide autour de son axe CC, on l'abandonne à lui-même : cet axe reste immobile. Si l'on agit ensuite sur l'anneau E pour le faire tourner autour de DD, on éprouve une résistance énergique, comme si cet anneau était fixé à l'anneau F, et le seul résultat que l'on obtienne est une rotation de tout le système autour de GG. De même, si l'on agit sur l'anneau F pour le faire tourner autour de GG, on n'y parvient pas, mais l'anneau E bascule autour de son axe DD. Le sens de ces mouvements est d'ailleurs toujours conforme à la loi de la tendance des axes au parallélisme.

On peut, au moyen de divers appareils, manifester cette loi sous des formes curieuses et saisissantes, dont nous ne pouvons parler ici.

Exercices.

1. Un tore, dont le cercle générateur a 0^m01 de rayon et a son centre à une distance $\delta = 0^m12$ de l'axe de rotation, tourne avec une vitesse de 6000 tours par minute autour de cet axe. La distance l de son centre de gravité au point fixe de cet axe est 0^m02, et l'inclinaison initiale α de l'axe sur la verticale est de 45°. Déterminer la durée T et l'amplitude $2u_1$ de la nutation, la vitesse ψ' de précession moyenne et le temps T' que l'axe du tore met à faire un tour entier autour de la verticale.

R. On trouve, au moyen des formules de l'ex. 16, chap. XXVI.

$$k = 1183{,}1\,; \quad 2u_1 = 0{,}00002578 = 5'',392\,; \quad T = 0^s{,}00531\,; \quad \psi' = 0{,}02157\,;$$
$$T' = 291^s{,}29 = 4^m 51^s{,}29.$$

2. Un solide de révolution, homogène et pesant, fixé par un point de son axe de figure, a reçu un mouvement initial quelconque. Déterminer les conditions pour que l'axe décrive un cône de révolution autour de la verticale du point fixe.

R. Les notations restant celles du N° 2●●, il faut que l'on ait $\theta' = 0$, $\theta = \alpha$. Cette hypothèse, introduite dans les formules, conduit à

$$\psi' = \text{const.} = \mu, \quad \varphi' = \text{const.} = \nu, \quad \psi = \mu t, \quad \varphi = \nu t,$$
$$p = \mu \sin\alpha \sin\nu t, \quad q = \mu \sin\alpha \cos\nu t, \quad r = \nu + \mu\cos\alpha.$$

Pour que ces valeurs satisfassent aux équations d'Euler, il faut et il suffit que α, μ, ν vérifient l'équation

$$\sin\alpha\,[(C - A)\,\mu^2\cos\alpha + C\mu\nu - Mgl] = 0.$$

L'hypothèse $\sin\alpha = 0$ suppose l'axe de révolution vertical, sans autre condition. L'hypothèse

$$(C - A)\,\mu^2\cos\alpha + C\mu\nu - Mgl = 0$$

donne *une seule valeur* pour μ dans les cas suivants : 1° $\cos\alpha = 0$: l'axe est horizontal ; 2° $A = C$, l'ellipsoïde central est une sphère ; dans ces deux cas on a

$$\mu = \frac{Mgl}{C\nu}.$$

3° $l = 0$; le centre de gravité est au point fixe. On a

$$\mu = \frac{-C\nu}{(C - A)\cos\alpha}.$$

En général, pour des valeurs données de α et de ν, il y a deux valeurs de μ qui satisfont au problème, si

$$C^2n^2 + 4Mgl(C - A)\cos\alpha > 0.$$

Le cas particulier où $\nu = 0$ renferme la solution du problème du *pendule centrifuge*. La vitesse avec laquelle le plan passant par l'axe et la verticale du point fixe tourne autour de celle-ci est

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{Mgl}{(C - A)\cos\alpha}}.$$

Discuter.

CHAPITRE XXX.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE LIBRE.

217. Pour simplifier la question du mouvement d'un solide libre, nous concevrons que par son centre de gravité G on mène trois axes Gx, Gy, Gz constamment parallèles à des axes fixes OX, OY, OZ : le mouvement de translation du système Gxyz sera connu si l'on sait trouver celui du centre de gravité; le mouvement relatif du solide par rapport au système de comparaison Gxyz sera celui d'un solide autour d'un point fixe, et si on sait le déterminer, le problème proposé sera résolu.

Or, le centre de gravité G se meut comme si la masse M du solide était réunie en ce point, et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes. On appliquera donc les équations du mouvement d'un point libre (**139**).

Pour établir les équations du mouvement du solide par rapport à Gxyz, nous rappellerons que le théorème des moments subsiste, comme on l'a vu au N° **175**, lorsque l'on rapporte les moments des quantités de mouvement du système et les moments des forces extérieures, non plus à des axes fixes, mais à des axes passant par le centre de gravité et animés d'une simple translation. Donc, si l'on considère le mouvement

du solide par rapport à $Gxyz$, les projections de l'axe du couple résultant des forces extérieures sur ces axes seront respectivement égales aux projections de la vitesse du point K, extrémité de l'axe des quantités de mouvement *relatives*, et les équations d'Euler qui découlent immédiatement de ce théorème, seront applicables au mouvement relatif du solide par rapport aux axes Gx, Gy, Gz. De là ce théorème, qui ramène le problème proposé à deux problèmes déjà traités : *Lorsqu'un solide libre se meut sous l'action de forces extérieures données, le mouvement de son centre de gravité se détermine en y supposant toute la masse réunie et toutes les forces motrices transportées parallèlement à elles-mêmes ; et le mouvement du solide autour de son centre de gravité se détermine en regardant ce dernier point comme fixe, en supposant que les forces extérieures agissent sur le solide sans aucun changement, et appliquant la théorie du mouvement autour d'un point fixe.*

Si donc x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées de G par rapport aux axes fixes; X, Y, Z les composantes de l'une quelconque des forces appliquées au solide; p, q, r les projections de l'axe instantané de rotation relatif au point G sur les axes principaux d'inertie $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ correspondants au même point; θ, ψ, φ les angles qui déterminent la position du système $G\xi\eta\zeta$ par rapport au système $Gxyz$, les équations

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X,\qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y,\qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma Z,$$

jointes aux équations (1) et (2) du chapitre XXVIII, détermineront x_1, y_1, z_1, θ, ψ, φ en fonction du temps, et donneront la solution du problème.

218. Quand les forces extérieures ne dépendent que du temps ou de la position du centre de gravité, les trois équations ci-dessus permettent de déterminer le mouvement du point G isolément, sans que l'on ait besoin de connaître le mouvement de rotation du solide autour de son centre de gravité. Mais, en général, ces forces dépendent de la position du solide tout entier, et, par suite, de son mouvement de translation et de son mouvement de rotation à la fois. Dans ce cas, la détermination indépendante de x_1, y_1, z_1 ne peut se faire de la même manière, puisque ΣX, ΣY, ΣZ dépendent de θ, φ, ψ, et il faut intégrer simultanément les équations différentielles de la translation et de la rotation. Le problème est alors bien plus compliqué.

Le théorème ci-dessus n'en reste pas moins remarquable, car on a vu dans la Statique que les forces appliquées à un solide sont réductibles à une seule force R appliquée, par exemple, au centre de gravité du solide, et à un couple G. Or, le mouvement du centre de gravité est produit uniquement par la résultante R, sans que le couple G ait aucune influence ; et la rotation du solide autour de son centre de gravité est produite uniquement par le couple G, sans que la force R influe en rien sur cette rotation.

219. Considérons, comme exemple du premier cas, un solide de révolution homogène et pesant, lancé dans un espace libre de toute résistance. Son centre de gravité, situé sur l'axe de figure, est soumis simplement à l'action de la pesanteur ; il décrit une parabole suivant les lois discutées au N° **150**. Si nous fixons ensuite le centre de gravité pour étudier le mouvement autour de ce point, nous détruisons l'action de la pesanteur, et nous tombons dans le cas d'un solide de révolution fixé par un point de son axe et sur lequel n'agit aucune force motrice. On peut donc appliquer au mouvement du solide autour de son centre de gravité les propriétés et les formules des N^os^ **204**, **208**. Le problème est donc complétement résolu.

220. Comme second exemple, considérons un projectile cylindro-conique auquel l'explosion de la poudre a imprimé une vitesse de translation très-grande suivant la direction commune de l'axe de la pièce et de l'axe de figure du projectile, en même temps qu'une rotation excessivement rapide autour de cet axe, et qui se meut dans un milieu résistant tel que l'air. Les forces motrices se réduisent à une force verticale égale au poids du corps, appliquée à son centre de gravité G, et à la résultante DE des pressions que l'air exerce sur la face antérieure, résultante dirigée, à cause de la symétrie, dans le plan passant par la direction GT de la vitesse du centre de gravité et par l'axe de figure GA du projectile (on néglige le frottement contre l'air produit par la rotation). Si l'axe de figure GA coïncidait constamment avec GT, cette résultante passerait par le centre de gravité et ne produirait aucun effet sur la rotation du projectile, mais dès que cette coïncidence n'existe plus, la résultante DE, à cause du glissement des filets d'air sur la surface, se rapproche plus que GT d'une direction normale à l'axe GA ; elle tend donc à écarter l'axe de la direction du mouvement GT et à renverser le projectile, car



elle coupe habituellement l'axe GA en avant du centre de gravité. Comme d'ailleurs la direction et l'intensité de la résultante DE dépendent évidemment de la position de l'axe GA par rapport à GT, on voit qu'ici le mouvement du centre de gravité est influencé par la rotation du projectile autour de ce centre. Mais, dans une première approximation, on peut admettre que la composante principale de DE est dirigée suivant DG, et l'on n'a plus, pour déterminer le mouvement du centre de gravité G, qu'à chercher le mouvement d'un point pesant soumis à une résistance opposée à la vitesse et fonction de cette vitesse (Ch. XXI, Ex. 11); on suppose donc que le centre de gravité du projectile reste sensiblement dans le plan vertical passant par la direction de sa vitesse initiale (axe de la pièce).

Considérons ensuite le mouvement du corps autour de son centre de gravité G, supposé fixe. La direction de la force DE coupant constamment l'axe principal GA, la rotation n autour de cet axe est constante. Cette force produit d'ailleurs le même effet qu'une force P, appliquée perpendiculairement sur l'axe GA à une distance a du centre de gravité, dans le plan AGT. D'après la loi de la tendance des axes au parallélisme (**216**), comme le couple Pa tend à produire une rotation autour d'un axe normal au plan AGT, l'axe de figure de projectile se porte vers cet axe, et *se déplace donc, à chaque instant, normalement au plan passant par la direction de la translation* GT *et l'axe* GA *du corps*, en sorte qu'il décrirait un cône droit autour de la direction GT si celle-ci était invariable, ce qui n'a pas lieu vu le mouvement curviligne du centre de gravité.

Supposons que le sens de la rotation initiale soit de gauche à droite autour de GA; l'angle TGZ que fait la direction GT avec la verticale croît constamment; donc, au début, GT s'abaisse un peu par rapport à GA; la direction GY′ de l'axe de la rotation que la force P tend à produire est donc horizontale et vers la gauche du tireur; l'axe GA se porte donc de droite à gauche, puis de haut en bas. Par suite de l'abaissement continu de GT,



l'angle AGT croît et décroît alternativement, en restant toujours très-petit puisque l'axe GA tourne autour de GT. Ce résultat est d'une grande importance pour la précision du tir, parce que 1° le projectile se présente

constamment à l'air qu'il traverse dans le sens où la résistance est la plus petite, vu la forme donnée au corps : la portée est donc augmentée; 2° la rotation énergique imprimée au corps absorbe les rotations accidentelles qui se produisaient autrefois, soit dans l'âme de la pièce, soit par le frottement de l'air, et permet ainsi de déterminer expérimentalement à l'avance l'effet de cette rotation quant au mouvement du centre de gravité.

En effet, dès que l'axe GA s'écarte de la direction GT, la composante de DE normale à GT, transportée au centre de gravité, agit 1° pour soulever le centre de gravité; 2° pour le porter vers la gauche du tireur. La première action a peu d'influence sur le tir, parce qu'elle s'exerce en sens contraire dès que, par suite de son mouvement conique, l'axe de figure est plus bas que GT; la deuxième s'exerce toujours dans le même sens, parce que, en suite de l'abaissement de GT, l'angle $\nu =$ ZTA croît et décroît alternativement, et l'axe du projectile reste à gauche du plan vertical ZGT; c'est ce qui donne lieu à la *dérivation* horizontale des projectiles tournants.

Exercices.

1. Une figure plane de masse M se déplace dans son plan sous l'action de forces données. Déterminer son mouvement; examiner en particulier le cas où les forces motrices se réduisent à un couple constant.

R. Soient, à l'époque t, x_1, y_1 les coordonnées du centre de gravité, rapportées à deux axes rectangulaires fixes OX, OY; X, Y les composantes de l'une des forces motrices; G le moment du couple résultant de ces forces par rapport au centre de gravité; H le moment d'inertie de la figure par rapport à une normale au plan menée par le centre de gravité; ω la vitesse angulaire de rotation de la figure autour de ce centre; α, β les coordonnées du centre instantané de rotation. On a

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X,\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y,\quad \frac{d\omega}{dt}=\frac{G}{H}\cdot$$

Après avoir tiré de là x_1, y_1, ω en fonction de t, on aura

$$\alpha=x_1+\frac{1}{\omega}\frac{dy_1}{dt},\quad \beta=y_1-\frac{1}{\omega}\frac{dx_1}{dt},$$

et la vitesse d'un point quelconque de la figure sera connue en grandeur et en direction. Dans le cas de G constant, soient a, b, ω_0 les composantes de la vitesse initiale du c. de gr. et la vitesse angulaire initiale; $\mu = G : H$; on a

$$x_1=at,\quad y_1=bt,\quad \omega=\mu t+\omega_0,\quad \theta=\frac{\mu t^2}{2}+\omega_0 t,$$

$$\alpha=at+\frac{b}{\mu t+\omega_0},\quad \beta=bt-\frac{a}{\mu t+\omega_0}\cdot$$

Le c. de gr. décrit une droite ; la vitesse angulaire ω croît proportionnellement au temps ; le centre instantané de rotation se meut sur une droite mobile, passant par le c. de gr. et perpendiculaire à celle que décrit celui-ci, en se rapprochant indéfiniment du c. de gr.

2. Mouvement de la toupie.

R. On suppose un solide de révolution pesant, s'appuyant par un point O de son axe de figure sur un plan horizontal parfaitement poli. Soient M la masse du corps, R la réaction normale du plan d'appui, z_1 la hauteur du c. de gr. G de la toupie au-dessus de ce plan.

Le mouvement du centre de gravité résulte d'une force verticale égale au poids du corps, — Mg, et d'une autre force verticale R. Les composantes horizontales de la force motrice étant nulles, *la projection du c. de gr. sur le plan d'appui décrit une droite d'un mouvement uniforme.* On a ensuite

$$M\frac{d^2z_1}{dt^2} = -Mg + R, \qquad R = M\left(g + \frac{d^2z_1}{dt^2}\right).$$

Pour étudier le mouvement de la toupie autour de son centre de gravité fixe, on cherche celui de l'axe $G\zeta$ de la toupie par rapport à trois axes fixes GX, GY, GZ dont le premier est vertical vers le haut. La force — Mg étant détruite, R rencontrant l'axe $G\zeta$, la rotation r autour de $G\zeta$ est constante et égale à n. Soient θ l'angle ζGZ, ψ l'angle du plan ζGZ avec un plan vertical fixe, l la longueur OG ; C, A les moments principaux relatifs au point G. Appliquant le théorème des forces vives au mouvement du corps autour de son centre de gravité, on a

$$A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + Cn^2 = -2\int R\,dz_1 ;$$

d'où, mettant pour R sa valeur ci-dessus, et observant que $z_1 = l\cos\theta$, on obtient l'équation

$$(1) \qquad (A + Ml^2\sin^2\theta)\,\theta'^2 + A\psi'^2\sin^2\theta = h - 2Mgl\cos\theta,$$

h étant une constante. Le théorème des moments appliqué à GZ fournit l'équation

$$(2) \qquad A\sin^2\theta\cdot\psi' + Cn\cos\theta = k,$$

k étant une constante. Éliminant ψ' entre (1) et (2), on arrive à

$$dt = \pm\frac{\sqrt{A}\sin\theta\,d\theta\sqrt{A + Ml^2\sin^2\theta}}{\sqrt{(h - 2Mgl\cos\theta)A\sin^2\theta - (k - Cn\cos\theta)^2}}.$$

La discussion de cette équation fournit des résultats semblaoles à ceux du N° 210. L'angle θ varie périodiquement, l'axe de la toupie s'abaisse et se relève alternativement, pendant que le plan vertical passant par l'axe de figure tourne autour de la verticale du point G avec un mouvement de précession continu dans le même sens. Si l'on suppose, en particulier, que la vitesse horizontale de G soit nulle, la pointe de la toupie décrit sur le plan autour de la projection du point G, une sorte de rosace composée d'une série d'arcs égaux, tangents à une circonférence extérieure, normaux à une circonférence intérieure.

2. Trouver, dans le mouvement d'un projectile cylindre-conique dans l'air, les équations qui déterminent le mouvement de l'axe du projectile autour du centre de gravité.

R. Soient (fig. du N° 220) ZGX le plan vertical du tir, θ l'angle AGZ que fait l'axe de figure avec la verticale, ψ l'angle AZX compris entre le plan du tir et le plan AGZ, δ l'angle AGT, ν l'angle ATZ entre le plan du tir et le plan AGT, ε l'angle entre les plans AGT, AGZ; φ l'inclinaison de la vitesse GT du centre de gravité sur l'horizontale GX; X_1, Y_1, les composantes de la force P perpendiculairement au plan AGZ et dans ce plan. Les formules du N° 216 donnent

$$\theta' = -\frac{aX_1}{Cn}, \quad \psi' = \frac{aY_1}{Cn \sin\theta}.$$

Or, on a $X_1 = -P \sin\varepsilon$, $Y_1 = P\cos\varepsilon$. De plus, soit A'GT' le plan passant l'axe et la vitesse de G à l'époque $t + dt$; projetant T sur l'arc A'T', on a

$$(\alpha) \qquad d\delta = -d\varphi \cos\nu.$$

Le triangle AZT donne la relation

$$\sin\delta \sin\nu = \sin\theta \sin\psi$$

qui, différentiée, conduit à

$$\cot\delta\, d\delta + \cot\nu\, d\nu = \cot\theta\, d\theta + \cot\psi\, d\psi = \frac{adt}{Cn}\left(\frac{Y_1 \cot\psi}{\sin\theta} - X_1 \cot\theta\right)$$

$$= \frac{Padt}{Cn \sin\theta \sin\psi}(\cos\varepsilon \cos\psi + \sin\varepsilon \sin\psi \cos\theta) = \frac{Pa \cot\nu}{Cn \sin\delta}\, dt.$$

De là on tire

$$(\beta) \qquad d\nu = -\frac{\operatorname{tg}\nu}{\operatorname{tg}\delta} d\delta + \frac{Pa\, dt}{Cn \sin\delta}.$$

L'angle φ est connu en fonction du temps, et le moment Pa est déterminé en fonction de δ par expérience. On a donc à intégrer le système (α), (β) entre δ, ν et t.

CHAPITRE XXXI.

ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA DYNAMIQUE

221. Les théorèmes généraux sur lesquels nous avons fondé l'étude du mouvement des solides s'appliquent à des systèmes matériels quelconques, mais ne suffisent plus, en général, pour obtenir toutes les équations différentielles nécessaires à la détermination de leur mouvement. Nous

allons exposer un principe général qui, combiné avec l'équation des vitesses virtuelles, conduit dans tous les cas à des équations en nombre suffisant.

Considérons un système quelconque de points matériels, sollicité par des forces quelconques et se mouvant sous l'influence de ces forces et des conditions auxquelles il est assujetti. Soient M un point du système, Q la force conservée de ce point (**153**), Q_1 une force égale et directement opposée à Q. Il est clair que nous ne changerons rien, ni au mouvement du système, ni aux réactions que ces points exercent les uns sur les autres, en appliquant au point M les forces Q et Q_1, puisqu'elles se font immédiatement équilibre sur ce point, et en opérant de la même manière sur chacun des autres points qui composent le système. Nous pouvons donc concevoir que ces forces égales et contraires existent réellement en chaque point du système, et que celui-ci se meut sous l'action de ces forces Q et Q_1, des forces motrices P, et des réactions provenant des liaisons. Or, si l'on se place à ce point de vue, on voit immédiatement que chaque point M du système se meut comme s'il était libre et soumis exclusivement à l'action de la force Q; donc les autres forces P et Q_1 qui agissent sur lui sont équilibrées par les liaisons, et puisque la même chose a lieu pour tous points, on peut dire que

Dans un système quelconque de points matériels en mouvement, à chaque instant, il y a équilibre en vertu des liaisons telles qu'elles existent à cet instant, entre les forces motrices appliquées au système, et les forces conservées de tous les points qui le composent, prises en sens contraire.

C'est en cela que consiste le *principe de d'Alembert*, dont l'utilité consiste en ce qu'il ramène immédiatement la théorie du mouvement des systèmes à celle de leur équilibre, et fournit une équation générale pour les problèmes de dynamique.

222. Supposons, en effet, que le système considéré soit un de ceux auxquels le principe des vitesses virtuelles est applicable. En vertu de ce principe, les forces Q et Q_1 ayant évidemment des travaux virtuels égaux et de signes contraires, il faut qu'à chaque instant la somme des travaux virtuels des forces motrices, moins la somme des travaux virtuels des forces conservées, soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons telles qu'elles existent à cet instant. De là l'équation

$$(1) \qquad \Sigma P\partial s \cos(P, \partial s) - \Sigma Q\partial s \cos(Q, \partial s) = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les points matériels du système. Ou encore, si m désigne la masse, x, y, z les coordonnées rectangles du point M, X, Y, Z les composantes de la force P qui agit sur lui, le travail virtuel de la force P aura pour expression (**63**)

$$X\partial x + Y\partial y + Z\partial z,$$

et celui de la force conservée du point M

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\partial x + m\frac{d^2y}{dt^2}\partial y + m\frac{d^2z}{dt^2}\partial z.$$

L'équation qui résulte du principe des vitesses virtuelles est donc

$$(2)\quad \Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\partial x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\partial y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\partial z\right] = 0.$$

Telle est l'équation générale de la dynamique. Pour voir comment elle conduit aux équations différentielles du mouvement, admettons que les liaisons existant entre les n points du système soient exprimées par des équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots.$$

qui renferment, en général, les $3n$ coordonnées $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ de ces points, et le temps t. Ces équations en nombre k devant être vérifiées pour chacun des déplacements virtuels auxquels s'applique l'équation (2), les variations $\partial x, \partial y, \partial z, \partial x_1, \ldots$ devront satisfaire aux relations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\partial x + \dfrac{dL}{dy}\partial y + \dfrac{dL}{dz}\partial z + \dfrac{dL}{dx_1}\partial x_1 + \cdots = 0, \\ \dfrac{dM}{dx}\partial x + \dfrac{dM}{dy}\partial y + \dfrac{dM}{dz}\partial z + \dfrac{dM}{dx_1}\partial x_1 + \cdots = 0, \\ \dfrac{dN}{dx}\partial x + \dfrac{dN}{dy}\partial y + \dfrac{dN}{dz}\partial z + \dfrac{dN}{dx_1}\partial x_1 + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dans ces différentiations par ∂, on observera que t doit être traité comme une constante, puisque le déplacement virtuel se rapporte aux liaisons telles qu'elles existent à l'instant t que l'on considère.

Si, des k équations (3), on tire les valeurs de k variations $\partial x, \partial y, \ldots$ en fonction des autres, et qu'on les substitue dans l'équation (2), on devra égaler à zéro les coefficients de ces $3n - k$ variations restantes, puisqu'elles ne sont plus assujetties à aucune condition et sont arbi-

traires. On formera ainsi $3n-k$ équations différentielles du second ordre, qui, jointes aux k relations données $L=0$, $M=0$, ..., suffisent pour la détermination des $3n$ variables inconnues x, y, z, x_1, ... en fonction de t. Les constantes arbitraires introduites par l'intégration se détermineront toujours par l'état initial du système.

Il est bon d'observer que les équations $L=0$, $M=0$,.. permettant d'éliminer k variables et leurs dérivées secondes par rapport au temps, le système à intégrer se réduit à $3n-k$ équations du second ordre entre $3n-k$ fonctions, et que le nombre des constantes arbitraires sera, en réalité, $6n-2k$. D'autre part, si l'on tient compte des relations que ces équations $L=0$, $M=0$,... établissent entre les coordonnées et les composantes des vitesses initiales des points du système, on voit que le nombre de ces quantités que l'on peut se donner arbitrairement se réduit précisément à $6n-2k$.

223. Comme application de la méthode au mouvement d'un simple point, cherchons *le mouvement d'un point* M de masse m, *assujetti à glisser sans frottement sur une courbe qui varie à chaque instant de position et même de forme.*

Soient $F(x, y, z, t)=0$, $F_1(x, y, z, t)=0$ les équations de la courbe variable; X, Y, Z les composantes de la force motrice P appliquée au point M; le système (2) et (3) donne ici

$$\left(X-m^2\frac{d^2x}{dt^2}\right)\partial x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\partial y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\partial z=0,$$

$$\frac{dF}{dx}\partial x+\frac{dF}{dy}\partial y+\frac{dF}{dz}\partial z=0,$$

$$\frac{dF_1}{dx}\partial x+\frac{dF_1}{dy}\partial y+\frac{dF_1}{dz}\partial z=0,$$

et l'élimination facile de ∂x, ∂y, ∂z entre ces trois équations fournira entre x, y, z et t une équation du deuxième ordre qui, jointe aux deux équations de la courbe variable, déterminera ces fonctions x, y, z.

Considérons, par exemple, un point pesant M qui glisse sans frottement sur une droite rigide OD, tournant autour de la verticale OZ avec une vitesse angulaire constante ω.

Appelons θ l'angle constant ZOD; ψ l'angle compris entre le plan mobile ZOD et sa position initiale ZOX; r la distance OM. Les équations de la ligne mobile OD peuvent se mettre, à cause de $\psi = \omega t$, sous la forme

$$(\alpha) \qquad x = r \sin\theta \cos\omega t, \qquad y = r \sin\theta \sin\omega t, \qquad z = r \cos\theta.$$

La force motrice a pour composantes $X = 0$, $Y = 0$, $Z = mg$, et l'équation (2) devient

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - g\delta z = 0.$$

Mais on a

$$\delta x = \sin\theta \cos\omega t \delta r, \qquad \delta y = \sin\theta \sin\omega t \delta r, \qquad \delta z = \cos\theta \delta r,$$

et, en observant que θ est constant,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\cos\omega t - 2\omega\frac{dr}{dt}\sin\omega t - \omega^2 r\cos\omega t\right)\sin\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\sin\omega t + 2\omega\frac{dr}{dt}\cos\omega t - \omega^2 r\sin\omega t\right)\sin\theta,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta;$$

d'où, éliminant les dérivées et les variations de x, y, z,

$$(\beta) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r \sin^2\theta = g\cos\theta.$$

Cette équation linéaire du second ordre, à coefficients constants, s'intègre immédiatement par les méthodes connues, et donne

$$r = Ae^{\omega t \sin\theta} + Be^{-\omega t\sin\theta} - \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}.$$

Si l'on suppose $r_0 = 0$; si u_0 désigne la vitesse initiale du point sur la droite mobile, les constantes A et B ont pour valeurs

$$A = \frac{g\cos\theta + \omega u_0 \sin\theta}{2\omega^2\sin^2\theta}, \qquad B = \frac{g\cos\theta - \omega u_0\sin\theta}{2\omega^2\sin^2\theta}.$$

Connaissant r en fonction du temps, on connaît x, y, z et le problème est entièrement résolu.

224. Considérons encore un système de deux points M, M′, pesants, liés par un fil flexible et inextensible, mobiles respectivement sur les côtés latéraux AB, AC d'un triangle vertical ABC. On néglige tous les frottements.

Soient m, m' les masses respectives; x, x' les distances des deux points au sommet A; l la longueur du fil; α, α' les inclinaisons des côtés BA, CA sur l'horizontale BC.

Faisons glisser infiniment peu le système mobile sur le triangle fixe; les travaux virtuels des forces P seront respectivement

$$mg\delta x \sin\alpha, \quad m'g\delta x' \sin\alpha';$$

les travaux virtuels des forces conservées Q seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x, \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x',$$

et le principe de d'Alembert fournira l'égalité

$$m\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0.$$

Mais la longueur du fil est constante; donc

$$x + x' = l, \qquad \delta x + \delta x' = 0, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2} = 0,$$

ce qui permet d'éliminer $\delta x'$ et d^2x' de l'équation ci-dessus, et donne

$$(m + m')\frac{d^2x}{dt^2} - g(m\sin\alpha - m'\sin\alpha') = 0.$$

Intégrant cette équation, désignant par x_0, v_0 les valeurs initiales de x et de v pour le point M, on a

$$x = \frac{g(m\sin\alpha - m'\sin\alpha')}{m + m'}\frac{t^2}{2} + v_0t + x_0.$$

La valeur de x donne celle de $x' = l - x$.

225. Appliquons encore le principe de d'Alembert au mouvement d'un fil flexible et inextensible, dont tous les points sont soumis à l'action de forces données. Les équations de l'équilibre du fil, obtenues aux N°s **115-116**, devront être vérifiées, d'après ce principe, si l'on y ajoute aux composantes X, Y, Z de la force motrice, rapportées à l'unité de

longueur du fil (**115**), les composantes changées de signe de la force conservée, rapportées aussi à l'unité de longueur. Ces composantes sont évidemment

$$\rho \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \rho \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \rho \frac{d^2z}{dt^2},$$

ρ étant la densité *linéaire* du fil au point (x, y, z).

Donc, en vertu des formules (2) du N° **116**, les équations du mouvement d'un fil flexible sont

$$(4) \quad \begin{cases} d\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) + \left(X - \rho\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)ds = 0, \\ d\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) + \left(Y - \rho\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)ds = 0, \\ d\left(T\dfrac{dz}{ds}\right) + \left(Z - \rho\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)ds = 0. \end{cases}$$

On doit remarquer 1° que dans ces équations toutes les différentielles qui ne renferment pas dt^2 en diviseur sont prises, non par rapport au temps, mais par rapport à s en supposant t constant, en sorte que ces équations sont, en réalité, aux différentielles partielles; 2° que ces égalités doivent être vérifiées en chacun des points du fil, mais qu'il faudra connaître en outre les conditions auxquelles sont assujetties les extrémités du fil, pour que le mouvement soit entièrement déterminé.

226. Revenons au problème général. Parmi les méthodes que l'on peut employer pour éliminer, entre les équations (2) et (3), les variations $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x_1, \ldots$ des coordonnées, la méthode *des multiplicateurs* (Cours d'An., n° **114**) présente des avantages particuliers. Multiplions les k équations (3) respectivement par des facteurs à déterminer $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, ajoutons-les membre à membre avec l'équation (2), et groupons dans l'équation résultante les termes en δx, les termes en δy, etc... Parmi les $3n$ variations $\delta x, \delta y, \ldots$, il y en a k qui sont, en vertu des équations (3), dépendantes des autres, lesquelles restent indéterminées. Concevons que l'on dispose des k quantités $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ de façon à faire évanouir, dans l'équation résultante, les coefficients des k variations $\delta x, \delta y, \ldots$ que l'on regarde comme dépendantes; les coefficients des autres qui restent arbitraires, devront s'évanouir séparément. On est donc conduit à égaler

à zéro les coefficients de toutes les variations δx, δy,... ce qui donne le système de $3n$ équations

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \cdots = o,\\ &Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \cdots = o,\\ &Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \cdots = o,\\ &X_1 - m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx_1} + \mu\frac{dM}{dx_1} + \cdots = o,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Ces $3n$ équations, jointes aux k équations $L = o$, $M = o$,... déterminent en fonction du temps les coordonnées de tous les points du système et les k multiplicateurs λ, μ, ν....

L'avantage de ce procédé consiste en ce qu'il fournit, dès que les quantités x, y, z,..; λ, μ,... sont connues en fonction de t, les efforts que les liaisons produisent sur chacun des points du système. En effet, si l'on prend par exemple la première des équations (5), elle montre immédiatement que la force totale qui sollicite le point m parallèlement à OX est

$$X + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \cdots,$$

et comme X est la projection sur cet axe de la force P, les autres termes représentent la somme des composantes suivant OX des réactions que les liaisons exercent sur le point M.

On tire aussi, du système (5), l'expression des forces qui pourraient remplacer l'une des liaisons données sans que rien fût changé au mouvement du système matériel. Il est clair, par exemple, que si l'on supprimait la liaison exprimée par l'équation $L = o$, rien ne serait modifié dans le mouvement, pourvu que l'on appliquât au point M une force ayant pour composantes $\lambda D_x L$, $\lambda D_y L$, $\lambda D_z L$; au point M_1 une force ayant pour composantes $\lambda D_{x_1} L$, $\lambda D_{y_1} L$, $\lambda D_{z_1} L$, etc.... On conclut de là que la force à introduire sur un point quelconque (x, y, z) dans le cas de la suppression d'une liaison L, est normale à la surface représentée par l'équation

$L = 0$, dans laquelle on considérerait comme seules variables les coordonnées (x, y, z) de ce point, tous les autres points du système étant supposés fixes.

227. Ce que nous venons de dire aux Nos **222** et **226** de la marche à suivre, pour tirer de l'équation générale de la dynamique combinée avec les équations des liaisons $L = 0$, $M = 0, \ldots$ les équations différentielles (5) du mouvement d'un système, est entièrement applicable au problème de l'équilibre. On combinerait de la même manière l'équation des vitesses virtuelles (**67**) avec les équations exprimant les conditions auxquelles le système est assujetti, pour éliminer les variations $\delta x, \delta y, \ldots$ et l'on obtiendrait les équations d'équilibre du système sous une forme qui ne différerait des relations (5) que par l'absence des accélérations $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ lesquelles sont évidemment nulles lorsque le système est en équilibre. On voit même clairement que le premier problème, celui de l'équilibre, n'est plus ici qu'un cas particulier du second, résolu par la formule générale de la dynamique.

228. Les équations générales du mouvement d'un système, sous la forme (5), ont l'inconvénient de renfermer $3n$ variables liées entr'elles par k équations. Lagrange a donné une méthode qui permet de réduire les variables dont dépend la position du système au plus petit nombre possible. Supposons que les $3n$ coordonnées $x, y, z, x_1, \ldots$ soient exprimées en fonction du temps et de $3n - k = r$ variables $q_1, q_2, \ldots q_r$ entre lesquelles il n'existe plus aucune relation donnée *a priori*, en sorte que les équations de condition $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ deviennent identiques lorsqu'on y remplace $x, y, z, x_1, \ldots$ par leurs valeurs en $t, q_1, q_2, \ldots$ Il s'agit de former les équations du mouvement entre ces nouvelles variables. Pour cela, soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du système, q l'une des variables $q_1, q_2, \ldots$. Indiquons par un accent $'$ des dérivées totales par rapport au temps t, et multiplions respectivement les équations (5) par les dérivées partielles $\frac{dx}{dq}, \frac{dy}{dq}, \frac{dz}{dq}, \frac{dx_1}{dq}, \ldots$, puis ajoutons-les. Nous aurons, en désignant par Σ une somme qui s'étend à tous les points du système,

$$(6)\qquad \Sigma m\left(\frac{dx}{dq}\frac{dx'}{dt} + \frac{dy}{dq}\frac{dy'}{dt} + \frac{dz}{dq}\frac{dz'}{dt}\right) = \Sigma\left(X\frac{dx}{dq} + Y\frac{dy}{dq} + Z\frac{dz}{dq}\right),$$

car le coefficient de λ,

$$\Sigma\left(\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dq}+\frac{dL}{dy}\frac{dy}{dq}+\frac{dL}{dz}\frac{dz}{dq}\right)$$

se réduit évidemment à zéro, l'équation $L=0$ étant vérifiée identiquement quel que soit q ; et il en est de même des coefficients de μ, ν, ... Les forces motrices X, Y, Z étant données généralement en fonction des coordonnées des points et du temps, deviendront, après la substitution, des fonctions de q_1, q_2, ... q_r, t, et le second membre de l'équation (6) sera une fonction connue Q de ces variables.

Quant au premier membre de l'équation (6), il peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{dx}{dq}+y'\frac{dy}{dq}+z'\frac{dz}{dq}\right)-\Sigma m\left[x'\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dq}\right)+y'\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dq}\right)+z'\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dq}\right)\right].$$

Mais, d'une part, x étant supposé exprimé en t, q_1, q_2, ..., on a

$$x'=\frac{dx}{dt}+\frac{dx}{dq_1}q'_1+\frac{dx}{dq_2}q'_2+\cdots+\frac{dx}{dq_r}q'_r\text{ (1)},$$

d'où l'on déduit, pour l'une quelconque des variables q,

$$\frac{dx'}{dq'}=\frac{dx}{dq},\quad \frac{dy'}{dq'}=\frac{dy}{dq},\quad \frac{dz'}{dq'}=\frac{dz}{dq},$$

les deux dernières équations se démontrant comme la première. D'autre part, d'après la règle qui permet de permuter l'ordre des différentiations, on voit facilement que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dq}\right)=\frac{dx'}{dq},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dq}\right)=\frac{dy'}{dq},\text{ etc...}$$

et le premier membre de (6) se ramène ainsi à la forme

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{dx'}{dq'}+y'\frac{dy'}{dq'}+z'\frac{dz'}{dq'}\right)-\Sigma m\left(x'\frac{dx'}{dq}+y'\frac{dy'}{dq}+z'\frac{dz'}{dq}\right).$$

Représentons, comme au chapitre XXV, par T l'énergie actuelle du système proposé. Nous aurons

$$T=\frac{1}{2}\Sigma mv^2=\frac{1}{2}\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2),$$

et l'équation (6) prendra la forme simple

$$(7)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq'}\right)-\frac{dT}{dq}=Q.$$

---

(1) $\frac{dx}{dt}$ est ici une dérivée partielle.

En remplaçant successivement dans cette équation q par q_1, q_2, ..., q_r, on aura r équations différentielles entre ces variables et t. Ce sont les équations de Lagrange, dans lesquelles les variables sont réduites au plus petit nombre. Elles prennent une forme particulièrement remarquable lorsqu'il existe une fonction des forces U $(t, x, y, z, ...)$. On a alors, en effet,

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{dq}+Y\frac{dy}{dq}+Z\frac{dz}{dq}\right)=\Sigma\left(\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dq}+\frac{dU}{dy}\frac{dy}{dq}+\frac{dU}{dz}\frac{dz}{dq}\right)=\frac{dU}{dq},$$

et l'équation (7) devient

$$(8)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq'}\right)-\frac{dT}{dq}=\frac{dU}{dq},$$

équation qui en donne r en faisant successivement q égal à q_1, q_2, ..., q_r.

229. Comme application, reprenons le problème du N° **223**. Les équations (α) donnent ici x, y, z en fonction d'une seule variable r et du temps t ; nous avons donc

$$q=r,\quad q'=r',\quad U=mgz=mgr\cos\theta,$$

$$x'=\sin\theta(r'\cos\omega t-\omega r\sin\omega t),\ y'=\sin\theta(r'\sin\omega t+\omega r\cos\omega t),\ z'=r'\cos\theta,$$

et en transformant T en fonction de r, r',

$$T=\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)=\frac{1}{2}m(r'^2+\omega^2r^2\sin^2\theta),$$

résultat qu'on obtient d'ailleurs immédiatement par la composition des vitesses; d'où

$$\frac{dT}{dr'}=mr',\quad \frac{dT}{dr}=m\omega^2r\sin^2\theta.$$

L'équation (8), divisée par m, sera donc ici

$$\frac{dr'}{dt}-\omega^2r\sin^2\theta=g\cos\theta,$$

et l'on tombe ainsi sur l'équation (β) du N° **223**.

Exercices.

1. Montrer comment le théorème du mouvement du centre de gravité et le théorème des moments, dans le cas d'un solide libre, se déduisent de l'équation (2).

R. On appliquera les équations du N° **22**.

2. Un point matériel M glisse sans frottement sur une droite qui tourne autour d'un

de ses points O, dans un plan horizontal, avec une vitesse telle que la tangente de l'angle décrit varie proportionnellement au temps. Déterminer le mouvement du point.

R. Soient x, y les coordonnées horizontales du point M, la position initiale OX de la droite étant pris pour axe des x; a une constante donnée. Le principe de d'Alembert donne l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y = 0,$$

et l'équation de la droite mobile sera $y = atx$.

Éliminant δy et y, intégrant l'équation entre x et t, on trouve successivement.

$$x = x_0 + \frac{v_0}{a}\operatorname{arc\,tg} at, \qquad y = x_0 at + v_0 t \operatorname{arc\,tg} at,$$

v_0 étant la vitesse initiale suivant la droite OX. La trajectoire du mobile a pour équation, en coordonnés polaires,

$$r = \frac{ax_0 + v_0\theta}{a\cos\theta}.$$

3. Une chaine homogène et pesante peut se mouvoir sans frottement sur un système BAC de deux plans inclinés et dans un plan vertical normal à leur intersection. Déterminer son mouvement.

R. Conservant les notations du N° 234, on trouve

$$x + x' = l,$$

$$x = Ce^{at} + C_1e^{-at} + \frac{l\sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}, \qquad \left[a^2 = \frac{g}{l}(\sin\alpha + \sin\alpha')\right].$$

Les constantes C, C_1 se déterminent par l'état initial.

4. Un point matériel pesant glisse sans frottement sur un plan qui tourne avec une vitesse constante ω autour d'un axe horizontal. Déterminer son mouvement.

R. L'axe étant pris pour axe des x, l'axe des z positifs vertical dans le sens de la pesanteur, soit r la distance du mobile m à l'axe de rotation. Appliquant la méthode de Lagrange, on a immédiatement par la composition des vitesses

$$T = \frac{1}{2}m(x'^2 + r'^2 + r^2\omega^2), \qquad U = mgr\sin\omega t,$$

$$\frac{d.\,mx'}{dt} = 0, \qquad \frac{dr'}{dt} - \omega^2 r = g\sin\omega t,$$

d'où l'on déduit

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 t, \qquad r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t.$$

Les constantes A et B étant déterminées par les données initiales, x et r sont connus en fonction de t, ce qui suffit.

5. Un fil flexible, homogène et pesant, tourne autour d'un axe vertical AZ, auquel il est fixé par une de ses extrémités A, avec une vitesse angulaire constante ω. En admettant que le fil conserve une figure constante, déterminer celle-ci.

R. On a dans les équations (4),

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = \rho g,$$

et, dans l'hypothèse admise,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Les équations (4) se réduisent à

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \rho\omega^2 x ds = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \rho\omega^2 y ds = 0, \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \rho g ds = 0.$$

Soient l la longueur AB du fil, A l'origine des arcs s; on tire des équations précédentes, T étant nul en B et égal à T_0 en A

$$T\frac{dx}{ds} = \rho\omega^2 \int_s^l x ds, \quad T\frac{dy}{ds} = \rho\omega^2 \int_s^l y ds, \quad T\frac{dz}{ds} = \rho g (l - s).$$

$$T + \rho\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \rho g z = T_0.$$

De là

$$dy \int_s^l x ds - dx \int_s^l y ds = 0, \quad y \int_s^l x ds - x \int_s^l y ds = 0,$$

en intégrant et observant que x, y sont nuls pour $s = 0$. On a donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

ce qui montre que la courbe affectée par le fil doit être plane et que le plan passe constamment par l'axe AZ. Prenons, dans ce plan mobile, un axe horizontal AX. Les deux égalités

$$T\frac{dz}{ds} = \rho g (l - s), \quad T + \frac{\rho\omega^2}{2} x^2 + \rho g z = T_0$$

donneront par l'élimination de T,

$$\left(T_0 - \rho g z - \rho\frac{\omega^2}{2} x^2\right) dz = \rho g (l - s) ds,$$

équation que l'on peut considérer comme l'équation différentielle de la courbe entre x et z.

On a aussi, x_1 désignant l'abscisse du centre de gravité de la portion MB du fil,

$$T\frac{dx}{ds} = \rho\omega^2 (l - s) x_1, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{\omega^2 x_1}{g},$$

ce qui constitue une propriété de la courbe. On en déduit diverses conséquences géométriques assez curieuses.

CHAPITRE XXXII.

DES PERCUSSIONS.

220. On donne le nom de *percussions* ou *forces instantanées* à des forces qui agissent avec une très-grande intensité pendant un temps extrêmement court, impossible à évaluer pratiquement. On a cru autrefois que ces forces imprimaient aux corps des vitesses finies pendant un temps rigoureusement nul, ce qui est impossible, et de là le nom de *forces instantanées*. Les chocs, les explosions développent des forces appartenant à cette catégorie.

Les formules et les principes de la mécanique générale sont d'ailleurs parfaitement applicables à ces forces comme à toutes les autres; seulement, à raison de l'impossibilité où l'on est d'estimer la durée d'une percussion ainsi que les variations de grandeur et de direction, pendant cette durée, des accélérations qu'elle communique aux points matériels, on est convenu d'introduire dans les questions où les percussions interviennent, non la mesure de leurs intensités, mais seulement leur effet total et définitif, comme il suit :

Soient X, Y, Z les composantes rectangulaires d'une force P appliquée à un point de masse m, τ la durée de son action ; on appelle composantes de l'*impulsion totale* de la force P les quantités

$$\int_0^\tau X dt, \quad \int_0^\tau Y dt, \quad \int_0^\tau Z dt.$$

Si le point m était libre et d'abord en repos, les équations (1) du N° **129**, multipliées par dt et intégrées entre o et τ, nous donneraient

$$(1) \qquad \int_0^\tau X dt = m v_x, \quad \int_0^\tau Y dt = m v_y, \quad \int_0^\tau Z dt = m v_z,$$

v_x, v_y, v_z désignant les composantes de la vitesse acquise au bout du temps τ. Ainsi, *l'impulsion totale d'une force* P *est représentée, en grandeur et en direction, par la quantité de mouvement qu'elle imprimerait à un point matériel libre et en repos.*

Cela posé, dans les calculs relatifs aux percussions, nous ferons figurer au lieu de ces forces elles-mêmes, leurs impulsions totales pendant la

durée très-courte τ de leur action, et ce sont ces impulsions que, pour abréger, nous désignerons sous le nom de *percussions*, en évitant avec soin de confondre cette manière de représenter leur effet total avec la mesure de leur intensité proprement dite.

221. Transformons les théorèmes du mouvement du centre de gravité et des moments sous ce nouveau point de vue. Supposons pour simplifier, qu'un système matériel soit en repos à l'époque $t = 0$ où des percussions viennent agir sur lui, et soit τ la durée totale de leur action. L'équation entre les forces extérieures et les forces conservées projetées sur un même axe (**165**),

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X,$$

multipliée par dt et intégrée entre 0 et τ, donne

$$\Sigma m v_x = \Sigma \int_0^\tau X dt;$$

d'où, en désignant par ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z les composantes de l'impulsion totale de la force extérieure P, et raisonnant de même pour les axes OY, OZ, on tire les équations

$$(2) \qquad \Sigma m v_x = \Sigma \varpi_x, \qquad \Sigma m v_y = \Sigma \varpi_y, \qquad \Sigma m v_z = \Sigma \varpi_z.$$

De même, l'équation entre la somme des moments des forces extérieures et celle des forces conservées par rapport à l'axe OX (**170**), savoir

$$\frac{d}{dt} \Sigma m (y v_z - z v_y) = \Sigma (yZ - zY),$$

multipliée par dt et intégrée de $t = 0$ à $t = \tau$, donne

$$\Sigma m (y v_z - z v_y) = \Sigma \int_0^\tau (yZ - zY)\, dt,$$

v_y, v_z se rapportant ici à $t = \tau$. Mais la durée τ de l'action des forces instantanées étant insensible, on admet que les points du système ne se déplacent pas d'une manière appréciable pendant ce temps, et l'on considère x, y, z comme constants dans l'intégrale au second membre. On a ainsi

$$\int_0^\tau (yZ - zY)\, dt = y \int_0^\tau Z dt - z \int_0^\tau Y dt = y \varpi_z - z \varpi_y,$$

et en substituant, puis opérant de même sur les autres axes,

$$(3)\quad \begin{cases} \Sigma m\,(yv_z - zv_y) = \Sigma\,(y\varpi_z - z\varpi_y), \\ \Sigma m\,(zv_x - xv_z) = \Sigma\,(z\varpi_x - x\varpi_z), \\ \Sigma m\,(xv_y - yv_x) = \Sigma\,(x\varpi_y - y\varpi_x). \end{cases}$$

On négligera, dans les équations (2) et (3), l'effet des forces extérieures ordinaires, leurs impulsions totales pendant le temps τ étant tout à fait insensibles ; ces équations donneront alors les théorèmes suivants :

Quand un système matériel en repos est soumis brusquement à l'action de percussions quelconques, 1° la somme des quantités de mouvement communiquées à tous les points, en projection sur un axe quelconque, est égale à la somme des percussions extérieures en projection sur le même axe; 2° la somme des moments des quantités de mouvement communiquées à tous les points, par rapport à un axe quelconque, est égale à la somme des moments des percussions extérieures par rapport au même axe.

232. Appliquons ces formules à un solide fixé par deux points O et O', en repos, et frappé par une percussion, pour déterminer la vitesse angulaire ω qui lui est communiquée autour de l'axe OO', les percussions sur les appuis O et O', et les conditions pour que ces percussions soient nulles.

Prenons OO' pour axe des z positifs, l'origine en O; soient α, β, γ les coordonnées du point M auquel est appliquée la force instantanée P; ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z les composantes de l'impulsion totale de cette force; U, V, W les composantes de la percussion totale sur le point O; U', V', W' sur le point O'; $a = \mathrm{OO'}$. Observant que les réactions des appuis sont égales et contraires aux efforts qu'ils éprouvent, et que l'on a pour tout point du solide $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$, on tire des équations (2)

$$-\omega\Sigma my = \varpi_x - \mathrm{U} - \mathrm{U'},\quad \omega\Sigma mx = \varpi_y - \mathrm{V} - \mathrm{V'},\quad 0 = \varpi_z - \mathrm{W} - \mathrm{W'},$$

ou, M étant la masse du solide, x_1, y_1 les coordonnées de son centre de gravité,

$$(4)\quad \mathrm{U} + \mathrm{U'} = \varpi_x + \mathrm{M}\omega y_1,\quad \mathrm{V} + \mathrm{V'} = \varpi_y - \mathrm{M}\omega x_1,\quad \mathrm{W} + \mathrm{W'} = \varpi_z.$$

De même, les équations (3) conduisent aux relations

$$(5)\quad \begin{cases} a\mathrm{V'} = -\beta\varpi_z + \gamma\varpi_y - \omega\Sigma mxz,\quad a\mathrm{U'} = \gamma\varpi_x - \alpha\varpi_z + \omega\Sigma myz, \\ \omega\Sigma m\,(x^2 + y^2) = \alpha\varpi_y - \beta\varpi_x. \end{cases}$$

Cette dernière formule donne la vitesse angulaire imprimée au solide;

elle est égale, H désignant le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe OO′, à

$$\frac{\alpha\varpi_y - \beta\varpi_x}{H},$$

c'est-à-dire *au moment de la percussion par rapport à l'axe fixe, divisé par le moment d'inertie du solide relatif à cet axe.* Les autres équations (4) et (5) déterminent U, U′, V, V′, W + W′, ou les percussions totales éprouvées par l'axe.

Si l'on demande que les points d'appui n'éprouvent aucune percussion, il faut poser U = o, V = o, ... etc., et les formules (4) donnent

$$\varpi_x = -M\omega y_1, \quad \varpi_y = M\omega x_1, \quad \varpi_z = o,$$

dont la première se réduit aussi à $\varpi_x = o$ si l'on fait passer, comme cela est permis, le plan XZ par le centre de gravité G du solide. Comme ϖ_x et ϖ_z sont nuls, la percussion ϖ se réduit à sa composante ϖ_y; 1° *elle est donc normale au plan passant par l'axe et le centre de gravité du solide.* On a ensuite

$$\omega = \frac{\alpha\varpi_y}{H} = \frac{\alpha M\omega x_1}{H}, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{H}{Mx_1},$$

ce que montre, d'après le N° **198**, que 2° *la distance à laquelle la direction de la percussion passe de l'axe doit être égale à la longueur du pendule composé que formerait le solide, si l'axe OO′ était horizontal.*

Enfin, les équations (5) deviennent, par la substitution des résultats précédents,

$$o = \gamma M\omega x_1 - \omega\Sigma mxz, \quad o = \omega\Sigma myz,$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma mx(z-\gamma) = \Sigma mxz - \gamma Mx_1 = o, \; \Sigma my(z-\gamma) = \Sigma myz - \gamma My_1 = o,$$

c'est-à-dire que 3° *l'axe OO′ doit être un axe principal d'inertie du solide, relativement au point A où il est coupé par un plan mené normalement à cet axe par la direction de la percussion ϖ.*

Les conditions 1°, 2°, 3° réunies sont donc nécessaires et suffisantes pour que l'axe OO′ n'éprouve aucune percussion par suite du choc qu'éprouve le solide.

Le point C où la direction de la percussion, déterminée par les conditions précédentes, vient percer le plan XZ passant par l'axe OO′ et le centre de gravité G, se nomme le *centre de percussion*. On utilisait la

propriété qui fait l'objet du théorème ci-dessus dans le *pendule de Robins*, dont on se servait autrefois pour évaluer la vitesse des projectiles de l'artillerie, mais que les appareils électro-balistiques ont aujourd'hui avantageusement remplacés.

233. *Théorème des forces vives appliqué aux percussions.* — L'application du théorème des forces vives aux percussions conduit à des résultats remarquables. Nous examinerons en particulier le cas de deux corps qui se rencontrent, animés de vitesses quelconques, d'où il résulte un choc, accompagné d'une percussion plus ou moins intense et d'une *déformation* des corps qui se choquent. Ensuite, selon que ces corps sont plus ou moins *élastiques*, ils reprennent plus ou moins exactement leurs formes primitives, et la variation de la force vive totale du système des deux corps dépend de cette dernière circonstance.

Considérons l'ensemble des deux corps choquants comme ne formant qu'un système matériel, et négligeons les actions extérieures, toujours très-faibles vis-à-vis des percussions, pendant la durée τ du choc, pour ne considérer que les réactions intérieures développées dans le système des deux corps par le choc. L'énergie totale du système reste constante (**180**), et nous avons l'équation connue

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi,$$

T_0, Π_0 se rapportant au commencement; T, Π à la fin du choc.

Supposons les deux corps parfaitement élastiques. Puisqu'ils reprennent exactement, le choc terminé, leurs formes primitives, les positions relatives des points du système redeviennent les mêmes aux époques $t = 0$, $t = \tau$, la fonction Π reprend donc la même valeur, et $\Pi - \Pi_0$ est nul. On a donc $T = T_0$, c'est-à-dire que

Lorsque deux corps parfaitement élastiques viennent à se choquer, il n'en résulte aucune variation dans la force vive totale du système des deux corps.

234. Considérons maintenant deux corps d'élasticité quelconque. Si, pour un point de masse m, v_0 et v désignent respectivement ses vitesses à deux époques quelconques 0 et τ, on nomme *vitesse perdue* du point à l'époque τ la vitesse u qui, composée avec v, reproduit v_0 en grandeur et en direction. On a donc

$$v_0^2 = v^2 + u^2 + 2uv\cos(u, v).$$

Multipliant par $\frac{m}{2}$ et faisant la somme pour tous les points du système matériel que l'on considère, on a

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mu^2 + \Sigma muv\cos(u, v).$$

Pour transformer cette équation, observons que si X désigne la somme des projections sur l'axe des x de toutes les forces, intérieures ou extérieures, qui agissent sur le point m à un instant quelconque, on a évidemment

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \text{ d'où } mv_x - m(v_x)_0 = \int_0^\tau X dt,$$

ou, ϖ_x désignant la somme des impulsions de ces forces en projection sur OX,

$$mu_x = -\varpi_x, \quad mu_y = -\varpi_y, \quad mu_z = -\varpi_z,$$

les deux dernières équations s'obtenant comme la première. Multiplions ces équations respectivement par v_x, v_y, v_z, ajoutons-les, et faisons la somme des équations semblables pour tous les points du système; nous aurons

$$\Sigma m(u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) = -\Sigma(\varpi_x v_x + \varpi_y v_y + \varpi_z v_z),$$

ce qui revient, d'après les propriétés des résultantes, à

$$\Sigma muv\cos(u, v) = -\Sigma\varpi v\cos(\varpi, v).$$

Combinons cette relation avec la formule (6); il vient

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv^2 = \frac{1}{2}\Sigma mu^2 - \Sigma\varpi v\cos(\varpi, v).$$

Sans nous arrêter à diverses conséquences remarquables que l'on peut déduire de cette équation (7), appliquons-la au système de deux corps qui se choquent, $t = 0$ répondant à l'instant où le choc commence. La durée τ étant excessivement courte, on peut admettre sans erreur sensible que les directions des droites qui joignent deux-à-deux les points du système ne varient pas sensiblement pendant ce temps, et comme l'action réciproque de deux points est dirigée suivant la droite r qui les joint, il en sera de même des impulsions réciproques. En effet, P_x, ϖ_x désignant la force et son impulsion totale projetées sur OX, on a

$$P_x = P\cos(r, x), \quad \varpi_x = \int_0^\tau P_x dt = \int_0^\tau P\cos(r, x)\, dt = \cos(r, x)\int_0^\tau P dt,$$

et deux équations semblables pour les axes OY, OZ, ce qui démontre la proposition. Il suit de là, et du théorème connu sur la somme des travaux élémentaires de deux forces égales et directement oposées (65), que l'on a

$$\Sigma \varpi v \cos(\varpi, v) = -\mathrm{S}\varpi \frac{dr}{dt},$$

le signe S se rapportant à tous les couples de points pris deux-à-deux. Supposons que l'époque $t = \tau$ corresponde à l'instant où la déformation des deux corps est la plus grande possible : à cet instant, la distance r qui sépare deux points matériels agissant l'un sur l'autre est un minimum; on a donc $\frac{dr}{dt} = 0$, et la même observation s'appliquant à tous les couples de points, l'équation (7) devient

$$\Sigma m v_0^2 - \Sigma m v^2 = \Sigma m u^2.$$

Donc, *dans le choc de deux corps d'élasticité quelconque, la perte de force vive qu'éprouve le système depuis l'instant où la percussion commence jusqu'à l'instant de la déformation maximum, est égale à la somme des forces vives correspondantes aux vitesses perdues de tous les points.*

Lorsque les corps sont totalement dénués d'élasticité, en sorte que la déformation persiste intégralement, il est clair que l'instant de la déformation maximum coïncide avec la fin de la période de choc, et le théorème précédent prend le nom de *Théorème de Carnot.*

Exercices.

1. Deux sphères homogènes et parfaitement élastiques de masses m, m', animées des vitesses de translation respectives v_0, v'_0 suivant la droite qui joint leurs centres, se choquent. Déterminer leur mouvement après le choc, et discuter le cas 1° où les masses sont égales; 2° où l'un des corps est en repos.

R. On prouve d'abord que le choc ne produira aucune rotation (218); puis, soient v, v' les vitesses des centres après le choc, comptées positivement dans un sens sur la ligne des centres. Le principe du centre de gravité fournit l'équation

$$mv + m'v' = mv_0 + m'v'_0;$$

le théorème de la conservation de la force vive (222) donne

$$mv^2 + m'v'^2 = mv_0^2 + m'v_0'^2.$$

Par la combinaison de ces équations on a

$$v = \frac{(m - m')\,v_0 + 2m'v'_0}{m + m'}, \quad v' = \frac{(m' - m)\,v'_0 + 2mv_0}{m + m'}.$$

2. Mêmes problèmes, les sphères étant dénuées de toute élasticité.

R. L'équation du centre de gravité subsiste. Le théorème de Carnot donne, u étant égal ici à $v_o - v$,

$$\sum mv^2 = \sum mv_o v, \quad \text{ou} \quad mv(v - v_o) + m'v'(v' - v'_o) = 0.$$

Combinant les deux équations, on a

$$m(v - v_o)(v - v') = 0 \quad \text{ou} \quad v = v',$$

d'où l'on tire

$$v = v' = \frac{mv_o + m'v'_o}{m + m'}.$$

3. Une sphère homogène, parfaitement élastique, vient frapper une surface fixe; on néglige le frottement. Démontrer que les vitesses du centre de la sphère, avant et après le choc, sont égales, également inclinées sur la normale à la surface, et dans un même plan avec cette normale.

R. Combiner le théorème du centre de gravité et celui des forces vives.

4. Même problème, dans l'hypothèse où la vitesse du centre, normale à la surface, serait diminuée par le choc dans le rapport de e à 1, e étant un coefficient moindre que l'unité.

R. Soient v_o, v les vitesses avant et après le choc, α_o et α les angles aigus que font leurs directions avec le plan tangent. On a

$$\operatorname{tg}\alpha = e \operatorname{tg}\alpha_o, \quad v = \frac{v_o \cos\alpha_o}{\cos\alpha}.$$

5. Une bille sphérique, pesante, d'élasticité e, est lancée avec une vitesse donnée de grandeur et de direction au dessus d'un plan horizontal fixe, sur lequel elle rebondit plusieurs fois. Déterminer les instants des chocs successifs, les points du plan où ils ont lieu, la vitesse après un choc quelconque et l'angle qu'elle fait avec le plan. On fait abstraction du frottement et de la résistance de l'air.

R. L'origine O étant au point de départ sur le plan, l'axe OX à l'intersection du plan donné et du plan vertical dans lequel le mouvement a lieu, soient v_o, α_o les données initiales, v_n et α_n la vitesse et son inclinaison sur le plan après le n^{me} choc; x_n, t_n la distance et le temps compris entre le départ et ce n^{me} choc; on trouvera

$$\operatorname{tg}\alpha_n = e^n \operatorname{tg}\alpha_o, \quad v_n = v_o \cos\alpha_o \sqrt{1 + e^{2n} \operatorname{tg}^2 \alpha_o},$$

$$t_n = \frac{2v_o \sin\alpha_o}{g}\,\frac{1 - e^n}{1 - e}, \quad x_n = \frac{2v_o^2 \sin\alpha_o \cos\alpha_o}{g}\,\frac{1 - e^n}{1 - e}.$$

6. Établir les formules générales qui déterminent les effets du choc de deux corps libres quelconques, animés de mouvements quelconques, dans les deux hypothèses extrêmes de l'élasticité parfaite et de l'élasticité nulle.

R. Les composantes de la vitesse du centre de gravité de chacun des corps suivant ses axes principaux d'inertie, et les composantes de l'axe instantané de rotation suivant ces mêmes axes, sont donnés à l'instant où le choc commence; leurs valeurs après le choc, et l'intensité de la percussion réciproque, sont les treize inconnues du problème. Le théorème du N° **231** donne douze équations. Le théorème de la conservation de la force vive, dans le premier cas, celui de Carnot dans le second, fournissent la treizième équation.

CHAPITRE XXXIII.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT.

235. Les équations différentielles du mouvement d'un point ou d'un système, telles que nous les avons établies; les propriétés que nous en avons déduites, reposent sur les principes fondamentaux énoncés au chapitre IX et supposent, par conséquent, que le mouvement soit rapporté à un système immobile dans l'espace : en d'autres termes, elles conviennent seulement au mouvement que nous nommons *absolu* (**49**). Mais dans bien des cas on a besoin de connaître le mouvement *apparent* ou *relatif*, rapporté à un système de comparaison qui se déplace lui-même constamment par rapport à celui que nous prenons comme immobile dans l'énoncé des principes fondamentaux. Par exemple, dans les cas où nous avons étudié le mouvement d'un point ou d'un solide à la surface de la terre, nous avons raisonné comme si celle-ci était en repos et traité ce mouvement comme absolu; or, nous savons que la terre possède un mouvement assez compliqué par rapport au système des étoiles fixes. Il reste donc à justifier la marche suivie et, plus généralement, à établir la théorie du mouvement rapporté à un système de comparaison mobile dans l'espace.

On peut suivre deux méthodes : 1° déterminer le mouvement absolu du corps par les théories connues, et passer du mouvement absolu au mouvement relatif par un changement de coordonnées; mais cela peut devenir impraticable lorsque les forces motrices dépendent du mouvement relatif du corps; 2° former directement les équations différentielles du mouvement d'un point ou d'un système de points, rapporté à un système de comparaison animé d'un mouvement d'ailleurs connu. C'est ce que nous allons faire, en considérant d'abord le cas d'un simple point libre.

236. Reprenons les formules du chapitre VIII; mais, toute confusion étant désormais impossible, soient OX, OY, OZ les axes rectangulaires mobiles auxquels nous réduisons le système de comparaison. Nommons p, q, r les projections de l'axe instantané de rotation de ce système, à l'époque t, sur OX, OY, OZ; x, y, z les coordonnées relatives, m la

masse du point mobile M; X, Y, Z les projections sur ces mêmes axes de de la force motrice P qui détermine le mouvement absolu de ce point. La première équation (5) du chapitre VIII devient, par ce changement de notations,

$$j'_x = j_x - j''_x - 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right).$$

La force P est représentée en grandeur et en direction par l'accélération *absolue* j du point M, multipliée par la masse m; ses composantes X, Y, Z suivant OX, OY, OZ à un instant quelconque, sont donc égales respectivement à mj_x, mj_y, mj_z. D'autre part, les composantes de l'accélération relative j' ont pour expressions

$$j'_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad j'_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad j'_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Multipliant par m l'équation ci-dessus, faisant les substitutions et opérant de même pour les axes OY, OZ, on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} - mj''_x - 2m\left(q\dfrac{dz}{dt} - r\dfrac{dy}{dt}\right), \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} - mj''_y - 2m\left(r\dfrac{dx}{dt} - p\dfrac{dz}{dt}\right), \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z} - mj''_z - 2m\left(p\dfrac{dy}{dt} - q\dfrac{dx}{dt}\right). \end{cases}$$

Les accélérations *d'entraînement* j''_x, j''_y, j''_z du point M dépendent à la fois du mouvement du système de comparaison et de la position actuelle du mobile dans ce système : on les exprimera facilement, dans chaque cas, en fonction de x, y, z et des quantités qui définissent le mouvement du système OXYZ. Les équations (1) sont donc les équations différentielles du mouvement relatif d'un point libre.

La force qui a pour composantes $-mj''_x$, $-mj''_y$, $-mj''_z$ s'appelle la *réaction d'entraînement*; celle dont les composantes sont

$$-2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \quad -2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \quad -2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right)$$

est la *force centrifuge composée :* on sait que sa direction, à chaque instant, est perpendiculaire à celle de la vitesse relative v' (**45**). Les équations (1) renferment le théorème suivant : *Le mouvement relatif*

d'un point matériel libre, par rapport à un système de comparaison mobile, peut être traité comme un mouvement absolu et donne lieu aux mêmes propriétés, pourvu que l'on joigne à la force motrice P, *dans les formules et les énoncés, deux forces fictives, savoir : la réaction d'entraînement, et la force centrifuge composée.*

Si le point M n'est pas libre, mais assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe (sans frottement), on sait que ce cas se ramène au précédent. On ajoutera aux composantes X, Y, Z de la force motrice suivant les axes mobiles, les composantes respectives de la réaction normale de la surface ou de la courbe, ce qui introduira de nouvelles inconnues; mais les équations de la surface ou de la courbe, que l'on suppose exprimées en coordonnées par rapport à OX, OY, OZ, fourniront de nouvelles relations, en nombre suffisant, entre les fonctions cherchées x, y, z.

237. Appliquons ce qui précède, en général, au mouvement apparent d'un point matériel à la surface de la terre. Celle-ci possède un mouvement de translation dans l'espace, mais on peut en faire abstraction. En effet, ce mouvement est dû à l'action du soleil et des planètes, action qui est très-sensiblement la même en grandeur et en direction sur tous les points du globe terrestre : la réaction d'entraînement, que l'on devrait appliquer au point M, sera donc détruite par l'action même que ces astres exerce sur ce point. Il suffit ainsi de considérer la terre comme tournant autour de son axe *fixe* NS, de l'ouest à l'est, avec une vitesse angulaire constante ω qui lui fait décrire un tour entier en un jour sidéral, ou 86164 secondes.



On a

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073;$$

ω est donc une très-petite quantité, et ses composantes p, q, r suivant OX, OY, OZ sont également très-petites. Il en résulte que, *si l'on ne suppose pas la vitesse relative v' très-grande*, les forces centrifuges composées pourront être négligées dans les équations (1), et l'on n'aura à joindre à la force motrice P que la réaction d'entraînement $-mj''$.

Or, d'après ce qu'on sait (**38**, 2°) de l'accélération d'un point qui décrit un cercle d'un mouvement uniforme, si r désigne la distance du point mobile à l'axe terrestre, cette réaction d'entraînement se réduit ici

à la force centrifuge $m\omega^2 r$ due au mouvement de rotation autour de l'axe terrestre ; elle est dirigée suivant le prolongement MF du rayon r. Sa valeur est aussi toujours assez faible, car à l'équateur, où elle est maximum et où $r = 6{,}378{,}000$, on a seulement

$$\omega^2 r = 0{,}034.$$

Si donc nous voulons déterminer d'abord le mouvement apparent d'un point libre, soumis uniquement à l'attraction de la masse terrestre, nous devrons joindre à cette attraction la force centrifuge correspondante à la position actuelle du point mobile dans la rotation autour de l'axe NS. Or, c'est précisément cette résultante de l'attraction et de la force centrifuge que nous appelons la *pesanteur* : c'est la force égale et contraire à celle qu'il faudrait appliquer au point M, supposé en repos apparent, pour qu'il restât en équilibre (fil à plomb). Ainsi la direction de la verticale n'est pas celle de l'attraction que la terre exerce sur le point M, mais de l'attraction composée avec la force centrifuge ; et c'est pour cette raison qu'elle est normale à la surface des eaux tranquilles. Il suit de là que, dans les problèmes où nous avons étudié le mouvement des corps pesants à la surface de la terre, nous avons implicitement tenu compte de la rotation terrestre en substituant la pesanteur à l'attraction du globe : nos résultats sont donc justifiés.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un point soumis à l'action de diverses forces. Comme l'attraction de la terre, qui s'exerce sur tous les corps à sa surface, sera toujours l'une de ces forces, on fera le même raisonnement que ci-dessus, et l'on en conclura cette règle générale : *Dans l'étude du mouvement relatif d'un point matériel à la surface de la terre, sous l'influence de forces et de liaisons quelconques, on peut avec une approximation suffisante* (sauf le cas de grandes vitesses) *raisonner comme si la terre était en repos et appliquer les équations du mouvement absolu, pourvu que l'on remplace l'attraction terrestre par la pesanteur.*

238. Lorsque la vitesse relative est très-grande, ou lorsque la force centrifuge composée agit dans le même sens pendant un temps assez long, ses effets peuvent devenir sensibles, et il est nécessaire d'établir les équations du mouvement relatif d'un point à la surface de la terre en en tenant compte.

Soit O l'origine, fixe par rapport au globe, et prise dans l'hémisphère

boréal; OZ dirigé suivant la verticale du point O, dans le sens de la pesanteur; OX horizontal dans le plan méridien, vers le sud; OY horizontal, perpendiculaire au plan méridien vers l'est; soit NOS la parallèle menée par O à l'axe de rotation de la terre, et comme la rotation a lieu de l'ouest à l'est, OS sera, suivant nos conventions, la direction propre de l'axe de rotation. Soit enfin λ la *latitude* du point O, ou le complément de l'angle ZOS que fait l'axe terrestre avec la verticale de ce point. Nous avons donc



$$p = \omega \cos\lambda, \quad q = 0, \quad r = \omega \sin\lambda.$$

Le point mobile étant supposé ne jamais s'écarter beaucoup de l'origine O, il sera permis de regarder la pesanteur comme constante d'intensité et parallèle à OZ dans toute l'étendue de la trajectoire. On fera donc, dans les équations (1),

$$X - mj''_x = 0, \quad Y - mj''_y = 0, \quad Z - mj''_z = mg,$$

et l'on aura, en supprimant le facteur m,

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \sin\lambda \dfrac{dy}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\left(\sin\lambda \dfrac{dx}{dt} - \cos\lambda \dfrac{dz}{dt}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + 2\omega \cos\lambda \dfrac{dy}{dt} = g. \end{cases}$$

L'origine O étant placée à la position initiale du mobile, x, y, z sont nuls pour $t = 0$; soient a, b, c les composantes de la vitesse relative initiale. On a, par une première intégration,

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2\omega \sin\lambda \cdot y = a, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2\omega(x \sin\lambda - z\cos\lambda) = b, \\ \dfrac{dz}{dt} + 2\omega \cos\lambda \cdot y = gt + c. \end{cases}$$

Eliminant dy entre la première et la troisième équation (2), intégrant et posant $a\cos\lambda + c\sin\lambda = c_1$, on a ensuite

$$\frac{dx}{dt}\cos\lambda + \frac{dz}{dt}\sin\lambda = gt\sin\lambda + c_1,$$

et en intégrant de nouveau

$$(4) \qquad x\cos\lambda + z\sin\lambda = \frac{gt^2}{2}\sin\lambda + c_1 t.$$

Si dans la deuxième équation (2), on met pour dx et dz leurs valeurs tirées des équations (3), il vient, après des réductions faciles,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\omega^2 y = 2\omega\,(gt\cos\lambda - a_1),$$

a_1 désignant la quantité $a\sin\lambda - c\cos\lambda$.

L'intégrale de cette équation s'obtient immédiatement (COURS D'AN. 346), et l'on a

$$y = A\cos 2\omega t + B\sin 2\omega t + \frac{g\cos\lambda}{2\omega}t - \frac{a_1}{2\omega};$$

les constantes A, B, déterminées par les valeurs initiales $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = b$, sont respectivement

$$A = \frac{a_1}{2\omega}, \quad B = \frac{1}{2\omega}\left(b - \frac{g\cos\lambda}{2\omega}\right).$$

Pour abréger, nous les représenterons par $G\sin\alpha$, $G\cos\alpha$, G et α étant faciles à évaluer, et nous aurons

$$(5) \qquad y = \frac{g\cos\lambda}{2\omega}t - G\sin\alpha + G\sin(2\omega t + \alpha),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g\cos\lambda}{2\omega} + 2\omega G\cos(2\omega t + \alpha);$$

cette dernière valeur, substituée dans la deuxième des équations (3), donne

$$x\sin\lambda - z\cos\lambda = \frac{b}{2\omega} - \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2} - G\cos(2\omega t + \alpha).$$

ou

$$(6) \qquad x\sin\lambda - z\cos\lambda = G\cos\alpha - G\cos(2\omega t + \alpha).$$

330. Les équations (4), (5), (6) donnent la solution du problème; elles conduisent à des conséquences fort curieuses que nous n'indiquerons

pas ici, nous bornant à examiner le cas où, la vitesse initiale étant nulle, on néglige en outre dans les résultats ci-dessus les termes de l'ordre du carré de la vitesse angulaire ω. On fait donc

$$a=0,\ b=0,\ c=0, \text{ d'où } a_1=0,\ c_1=0,\ G\sin\alpha=0,\ G\cos\alpha=-\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2},$$

d'où enfin

$$G=\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2},\quad \alpha=\pi.$$

Substituant dans les équations (4), (5), (6), développant $1-\cos 2\omega t$, $\sin 2\omega t$ suivant les puissances ascendantes de $2\omega t$, et négligeant après la substitution les termes qui renferment ω^2 en facteur, on obtient les résultats suivants :

$$x\cos\lambda+z\sin\lambda=\frac{gt^2}{2}\sin\lambda,\ y=\frac{g\omega\cos\lambda}{3}t^3,\ x\sin\lambda-z\cos\lambda=-\frac{gt^2}{2}\cos\lambda,$$

d'où enfin

$$x=0,\quad y=\frac{g\omega\cos\lambda}{3}t^3,\quad z=\frac{gt^2}{2}.$$

Ces équations montrent que *si l'on abandonne un point matériel, sans vitesse initiale, à l'action de la pesanteur, le mobile restera dans un plan normal à la ligne méridienne, en déviant de la verticale vers l'est d'une petite quantité; sa projection sur la verticale aura le même mouvement que si l'on ne tenait pas compte de la rotation de la terre.*

La trajectoire du mobile dans le plan vertical YZ a pour équation

$$y=\frac{2^{\frac{3}{2}}\omega\cos\lambda}{3g^{\frac{1}{2}}}z^{\frac{3}{2}};$$

elle touche la verticale au point de départ. Cette expression de y permet de calculer la déviation correspondante à une hauteur de chûte donnée. Dans l'expérience faite par M. Reich à l'un des puits de mine de Freiberg, on avait $\lambda=39^\circ$, $z=158^{m}50$, d'où l'on tire $y=0^{m}0276$. L'expérience a donné $y=0^{m}0283$.

Si l'on voulait conserver les termes de l'ordre de ω^2, les équations (4), (5), (6) ne donneraient pas des résultats plus exacts, parce qu'il faudrait aussi tenir compte des variations que la pesanteur éprouve en direction et en intensité, et d'autres quantités de même ordre que ω^2.

240. *Déviation du pendule libre.* — Comme deuxième exemple, proposons-nous d'étudier le mouvement apparent du pendule à un seul fil, ou, ce qui revient au même, le mouvement d'un point pesant M sur une surface sphérique de rayon l, invariablement liée à la terre. Soit N la tension du fil ou la réaction normale de la surface sphérique, rapportée à l'unité de masse du mobile.

Le point mobile n'étant soumis qu'à l'action de la pesanteur et de la tension N, il nous suffira, d'après la remarque faite à la fin du N° **236**, d'ajouter aux composantes de la pesanteur, dans les équations (2), les composantes de la réaction du fil. L'origine O étant au point de suspension du fil, les directions des axes OX, OY, OZ choisies comme précédemment, les composantes de la réaction du fil sont

$$-\frac{Nx}{l}, \quad -\frac{Ny}{l}, \quad -\frac{Nz}{l}.$$

Portant ces valeurs dans les équations (2) et posant pour abréger

$$k = \omega \sin\lambda, \qquad k' = \omega \cos\lambda,$$

on trouvera

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2k\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{Nx}{l} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2k\dfrac{dx}{dt} - 2k'\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{Ny}{l} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + 2k'\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{Nz}{l} = g. \end{cases}$$

Ces équations, jointes à la relation $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$, déterminent



x, y, z, N en fonction du temps et font connaître le mouvement apparent du pendule. Nous nous bornerons ici au cas où, supposant les oscillations très-petites ou le pendule s'écartant toujours très-peu de la verticale, on regarde les rapports $x : l$, $y : l$ comme des quantités du premier ordre dont on néglige les carrés, ainsi que les produits par k, k' qui sont de l'ordre de ω. Nous aurons, dans cet ordre d'approximation,

$$\frac{z}{l} = \left(1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{l^2} = 1, \qquad z = l,$$

et par conséquent $dz = 0$, $d^2z = 0$. La troisième équation (7) donne alors

$$N = g - 2k'\frac{dy}{dt},$$

d'où

$$\frac{Nx}{l} = \frac{gx}{l} - 2k'\frac{x}{l}\frac{dy}{dt} = \frac{gx}{l}, \quad \frac{Ny}{l} = \frac{gy}{l}.$$

Substituons dans les relations (7); il viendra

$$(8) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2k\frac{dy}{dt} + \frac{gx}{l} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \frac{gy}{l} = 0.$$

Ces équations suffisent pour déterminer le mouvement de la projection M′ du point M sur le plan XY. Pour les intégrer, nous poserons $g : l = h^2$, nous multiplierons la seconde équation par $i = \sqrt{-1}$, et ajoutant nous aurons

$$\frac{d^2(x + yi)}{dt^2} + 2ki\frac{d(x + yi)}{dt} + h^2(x + yi) = 0.$$

On vérifie cette équation par une expression de la forme

$$x + yi = e^{irt},$$

si r satisfait à l'équation

$$r^2 + 2kr - h^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad r = -k \pm \sqrt{h^2 + k^2} = -k \pm h,$$

k^2 étant de l'ordre de ω^2. On a donc

$$x + yi = C_1 e^{-(k+h)it} + C_2 e^{-(k-h)it},$$

les constantes C_1, C_2 étant déterminées par les données initiales. Supposons que la vitesse initiale soit nulle; de plus, posons

$$x_0 + y_0 i = \rho_0 e^{\psi_0 i},$$

ρ_0 et ψ_0 étant des constantes connues. On trouve sans peine

$$C_1 + C_2 = \rho_0 e^{\psi_0 i}, \quad C_1 - C_2 = -\frac{k}{h}\rho_0 e^{\psi_0 i},$$

d'où enfin

$$x + yi = \frac{\rho_0 e^{(\psi_0 - kt)i}}{2h}[(h - k)e^{-iht} + (h + k)e^{hit}],$$

ou

$$x + yi = \frac{\rho_0}{h} e^{(\psi_0 - kt)i}(h\cos ht + ki\sin ht).$$

D'après cela, si nous posons encore

$$\alpha = \psi_0 - kt, \quad x' = \frac{\rho_0}{h} h \cos ht, \quad y' = \frac{\rho_0}{h} k \sin ht,$$

il viendra

$$x + yi = e^{\alpha i}(x' + y'i),$$

d'où

$$(9) \qquad x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Ces équations (9) montrent que x', y' sont les coordonnées du point M' par rapport à un système d'axes rectangulaires X'OY' faisant avec le système primitif XOY un angle α dans le sens de OX vers OY; et à cause de $\alpha = \psi_0 - kt$, on voit 1° que ce système X'OY' tourne autour de la verticale OZ avec une vitesse angulaire constante $-k = -\omega \sin\lambda$, donc, dans le sens de OY vers OX, c'est-à-dire *en allant de l'est vers le sud*; 2° que pour $t = 0$, $\alpha = \psi_0$, donc la position initiale de OX' coïncide avec la projection du pendule sur le plan XY à l'instant $t = 0$.

Les valeurs de x', y' en fonction de t déterminent le mouvement de la projection M' par rapport à ce deuxième système de comparaison X'OY'. Ce mouvement est périodique, la durée de la période étant

$$T = \frac{2\pi}{h} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

elle est donc précisément la même que celle de l'oscillation complète du pendule simple de longueur l dans le plan vertical (**257**). L'équation de la trajectoire relative du point M' par rapport à X'OY' s'obtient par l'élimination de t entre les valeurs de x', y'; on trouve

$$\frac{x'^2}{h^2} + \frac{y'^2}{k^2} = \frac{\rho_0^2}{h^2}.$$

C'est une ellipse dont les demi-axes, dirigés suivant OX', OY', sont respectivement égaux à ρ_0, $\rho_0 k : h$. Le second axe est très-petit par rapport au premier, à cause de la petitesse du rapport $k : h$. On conclut de là que *dans le mouvement apparent du pendule libre à la surface de la terre, la projection horizontale du point pesant décrit une ellipse mobile très-allongée, dont le grand axe* OX' *tourne autour de la verticale du point de suspension, en allant de l'est vers le sud, avec une vitesse angulaire constante, égale à celle de la rotation terrestre multipliée par le sinus de la latitude du lieu d'observation.*

L'ellipse que décrit le point M′ étant très-allongée dans le sens de l'axe OX′, ce point ne semble guère s'écarter de l'axe, et le pendule paraît décrire un plan mobile, qui tourne autour de la verticale avec la vitesse angulaire $\omega \sin \lambda$. C'est ce phénomène de la déviation du plan d'oscillation du pendule libre que L. Foucault a mis en évidence au Panthéon de Paris. On avait alors

$$\lambda = 48°58'; \qquad l = 64^{m}.$$

La durée d'une rotation complète du plan d'oscillation, calculée d'après ces données, était de $41^{h}47^{m}$, ce que l'expérience a confirmé.

Exercices.

1. Mouvement apparent à la surface de la terre d'un point pesant assujetti à se mouvoir sur un plan horizontal. Sa trajectoire.

R. L'origine étant au point de départ, les axes mobiles comme au N° **228**; a, b les composantes de la vitesse initiale. Les équations donnent

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = a^2 + b^2, \qquad (x^2 + y^2)\,\omega \sin \lambda + ay - bx = 0.$$

La vitesse est constante; la trajectoire est un cercle dont le rayon est $\sqrt{a^2 + b^2} : 2\omega \sin \lambda$. A la latitude de Paris, la vitesse initiale étant 1, le rayon du cercle est 9132^{m}.

2. Déduire, des équations du N° **228**, les propriétés suivantes du mouvement d'un point libre à la surface de la terre : 1° La vitesse initiale étant verticale de bas en haut, la hauteur d'ascension h est la même que si la terre était immobile; la déviation de la verticale est vers l'ouest, et quadruple de ce qu'elle serait pour une hauteur de chûte h sans vitesse initiale; 2° La vitesse initiale v_0 étant perpendiculaire au plan du méridien, et faisant un angle α avec l'horizontale vers l'est, le mobile dévie vers le nord si α est aigu, vers le sud si α est obtus.

3. Appliquer la théorie du mouvement relatif au problème du N° **222**, et aux exercices 2 et 4 du chapitre XXXI.

4. Un cercle tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre vertical qui est fixe. Trouver le mouvement d'un point matériel pesant M assujetti à rester sur ce cercle; déterminer la position d'équilibre relatif du point.

R. Soient a le rayon du cercle, θ l'angle compris entre le diamètre vertical et le rayon mené du centre du cercle au point mobile M. En projetant, sur la tangente au cercle en M, la force motrice et les accélérations relative, d'entrainement, etc., on obtient immédiatement l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{a} \sin \theta.$$

On en déduit, pour la position d'équilibre relatif,

$$\cos\theta_1 = \frac{g}{a\omega^2}, \quad \frac{g}{a\omega^2} < 1.$$

Une première intégration de l'équation ci-dessus donne la relation

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{a}\cos\theta + \omega^2\sin^2\theta + C,$$

qu'on tire aussi du théorème de la force vive dans le mouvement relatif. Désignant par θ_0 la valeur de θ pour laquelle la vitesse du point devient nulle, on a

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0)\left[\frac{2g}{a\omega^2} - (\cos\theta + \cos\theta_0)\right].$$

Si l'on suppose $\theta_0 > \theta_1$, on a toujours $\theta < \theta_0$; le mobile descend sur le cercle, atteint sa vitesse angulaire maximum $\omega(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)$ pour $\theta = \theta_1$, s'arrête lorsque θ atteint la valeur θ' telle que $\cos\theta' = 2\cos\theta_1 - \cos\theta_0$; puis repart en sens contraire, et oscille ainsi de part et d'autre de la position $\theta = \theta_1$.

CHAPITRE XXXIV.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME MATÉRIEL.

241. Le problème du mouvement relatif d'un système matériel rapporté à un système de comparaison mobile se ramène aux formules du mouvement absolu par le théorème énoncé à la fin du N° **236**. Ainsi, l'on voit sans peine que le théorème du mouvement du centre de gravité, le théorème des moments et les équations (3), (5), (7) du chapitre XXIV qui expriment ces propriétés générales du mouvement, subsistent complétement si l'on introduit dans les énoncés, au lieu des mouvements absolus, les mouvements rapportés au système des axes mobiles, pourvu que l'on joigne en chaque point, aux forces extérieures qui le sollicitent, sa réaction d'entraînement et sa force centrifuge composée. La même chose a lieu pour la formule générale tirée du principe de d'Alembert, les équations des liaisons étant supposées exprimées en coordonnées relatives.

Le même raisonnement est applicable aux théorèmes des forces vives

et de l'énergie, avec ces remarques importantes : 1° Le travail des forces intérieures, défini par la variation de la fonction Π (**178**) qui dépend seulement des distances entre les points, a la même expression et la même valeur dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif; 2° La force centrifuge composée d'un point étant constamment normale à la direction de la vitesse relative de ce point, son travail pendant un temps quelconque, dans le mouvement relatif, est égal à zéro. On ne tiendra donc pas compte de cette force dans l'équation du travail.

Sans développer comme conséquences de ces principes les formules analytiques du mouvement relatif, nous allons simplement en présenter deux applications remarquables.

242. *Force vive d'un système animé de mouvements vibratoires.* — On a souvent à appliquer le théorème des forces vives à des corps solides dont tous les points sont, ou peuvent être animés de mouvements vibratoires extrêmement petits autour de certaines positions moyennes, indépendamment du mouvement d'ensemble dont le corps est animé sous l'action des forces extérieures, comprenant les réactions des obstacles fixes qui gênent le mouvement du corps. Ces vibrations, le plus souvent insaisissables à nos sens, doivent cependant représenter une force vive très-considérable, et si l'on applique le théorème des forces vives au système sans en tenir compte, on néglige une quantité dont il est nécessaire d'évaluer l'importance.

Pour cela, rapportons les petits mouvements des points matériels du corps à un système de comparaison invariable, qui ne sera autre chose que le *solide* formé des positions *moyennes* de ces points. Soient, à un instant quelconque, v la vitesse totale d'un point m, v' sa vitesse relative, due à la vibration autour de la position moyenne; v'' sa vitesse d'entraînement, due au mouvement du solide moyen. Comme le point m est supposé s'écarter toujours excessivement peu de sa position moyenne, on peut sans erreur sensible regarder v'' comme égal à la vitesse de la position moyenne du point m. La vitesse v étant la résultante de v', v'', on a

$$v^2 = v'^2 + v''^2 + 2v'v'' \cos(v', v''),$$

d'où, en posant

$$T = \frac{1}{2}\Sigma mv^2, \quad T' = \frac{1}{2}\Sigma mv'^2, \quad T'' = \frac{1}{2}\Sigma mv''^2,$$

$$T = T' + T'' + \Sigma mv'v'' \cos(v', v''). \tag{1}$$

D'autre part, le théorème des forces vives appliqué au mouvement absolu nous donne

$$dT = \Sigma F_e v \cos(F_e, v)\, dt - d\Pi,$$

F_e, Π ayant les mêmes significations qu'au chapitre XXV. Ce même théorème, appliqué au mouvement relatif, nous donne, eu égard aux remarques ci-dessus (**241**),

$$dT' = \Sigma F_e v' \cos(F_e, v')\, dt - d\Pi - \Sigma \varphi v' \cos(\varphi, v')\, dt,$$

φ désignant la force d'entraînement du point m. Soustrayant membre à membre, ayant égard à l'équation (1) différentiée, et observant que l'on a

$$v \cos(F_e, v) - v' \cos(F_e, v') = v'' \cos(F_e, v''),$$

puisque v est la résultante de v' et de v'', on trouve

$$dT'' + d.\,\Sigma m v' v'' \cos(v', v'') = \Sigma F_e v'' \cos(F_e, v'')\, dt + \Sigma \varphi v' \cos(\varphi, v')\, dt.$$

Or, en projection sur trois axes *fixes* OX, OY, OZ, on a

$$\varphi_x = m \frac{dv''_x}{dt}, \quad \varphi_y = m \frac{dv''_y}{dt}, \quad \varphi_z = m \frac{dv''_z}{dt},$$

d'où

$$\varphi v' \cos(\varphi, v')\, dt = (\varphi_x v'_x + \cdots)\, dt = m\left(v'_x \frac{dv''_x}{dt} + \cdots\right) dt$$

$$= m\, d(v'_x v''_x + \cdots) - m(v''_x dv'_x + \cdots) = d.\, m v' v'' \cos(v', v'') - m(v''_x dv'_x + \cdots).$$

Substituant dans l'équation ci-dessus, on aura

$$dT'' = \Sigma F_e v'' \cos(F_e, v'')\, dt - \Sigma m(v''_x dv'_x + v''_y dv'_y + v''_z dv'_z).$$

D'où enfin, intégrant et désignant par $\mathfrak{T}''$ le travail d'une force dans le mouvement d'entraînement, par H une constante, on a

$$(2) \qquad \frac{1}{2} \Sigma m v''^2 = \Sigma \mathfrak{T}'' F_e - \Sigma m \int (v''_x dv'_x + v''_y dv'_y + v''_z dv'_z) + H.$$

Lorsqu'on applique l'équation des forces vives au corps solide sans se préoccuper des petites vibrations de ses points matériels, on ne fait, en somme, qu'écrire l'équation

$$(3) \qquad \frac{1}{2} \Sigma m v''^2 = \Sigma \mathfrak{T}'' F_e + H.$$

L'erreur commise dans cette substitution est donc mesurée par le terme

$$-\Sigma m\int(v''_x\,dv'_x + v''_y\,dv'_y + v''_z\,dv'_z).$$

Comme la vitesse v' varie généralement beaucoup plus rapidement que v'', et se rapporte à un mouvement *périodique* tel que, dans un très-court intervalle de temps pendant lequel v'' peut être supposé constant de grandeur et de direction, la vitesse v' passe par des valeurs deux-à-deux égales, parallèles et de sens contraire, on a sensiblement pour chacune de ces périodes

$$\int(v''_x\,dv'_x + v''_y\,dv'_y + v''_z\,dv'_z) = 0,$$

et l'on voit qu'alors l'équation (2) peut, sans inconvénient, être remplacée par l'équation (3).

243. *Mouvement relatif du gyroscope à la surface de la terre.* — Étudions maintenant le mouvement relatif, à la surface de la terre, d'un solide de révolution fixé par son centre de gravité et animé d'une vitesse de rotation très-grande autour de son axe de figure. Soit OXYZ un système d'axes fixes par rapport à la terre, l'origine O étant au point fixe du tore; Oζ l'axe de figure, θ l'angle que fait Oζ avec l'axe fixe OZ; Oξ, Oη deux autres axes perpendiculaires à Oζ et liés au solide; p, q, r les composantes de la rotation relative suivant les axes mobiles Oξ, Oη, Oζ; p_1, q_1, r_1 les composantes, suivant les mêmes axes, de la rotation du système de comparaison OXYZ; ω la vitesse angulaire de la rotation terrestre; μ l'angle ζON de l'axe du tore avec la parallèle ON à l'axe boréal menée par le point O. Enfin, C, A sont les moments d'inertie du solide par rapport à Oζ et à une perpendiculaire à Oζ passant par le point O.



Le mouvement *absolu* du tore autour de son centre de gravité est dû à l'attraction terrestre et à la réaction du point d'appui O (**217**). Or, les forces centrifuges dues à la rotation de la terre étant sensiblement égales et parallèles pour tous les points du corps, donnent une résultante passant par son centre de gravité O; et comme la pesanteur, résultante de l'attraction et de la force centrifuge, se réduit aussi à une force passant par le point O, il est clair que la résultante des attractions terrestres passe par le centre de gravité O. On voit par là que, dans le mouvement absolu du tore, la somme des moments des forces extérieures

par rapport à l'axe de figure Oζ est nulle à chaque instant, et la troisième équation d'Euler donne, la vitesse angulaire de la rotation absolue autour de Oζ étant $r + r_1$,

$$C\frac{d(r+r_1)}{dt} = 0, \qquad r + r_1 = \text{const.},$$

ou, comme $r_1 = -\omega\cos\mu$,

$$r = \omega\cos\mu + \text{const.}$$

Soient n, μ_0 les valeurs initiales de r et de μ ; il vient

$$(4) \qquad r = n + \omega(\cos\mu - \cos\mu_0).$$

Appliquons le théorème des forces vives dans le mouvement relatif. Les forces absolues et les réactions d'entraînement donnent une résultante, qui est le poids du tore, passant par le point fixe O ; son travail relatif est nul. Le travail des forces centrifuges composées est toujours nul, comme on sait ; donc la force vive totale du solide dans son mouvement relatif est constante. Donc

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(p_0^2 + q_0^2) + Cn^2.$$

Remplaçons p, q par leurs valeurs en fonction des angles θ, ψ (**202**) ; r par sa valeur (4), et négligeons les termes en ω^2. Nous aurons

$$(5) \qquad A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) = 2Cn\omega(\cos\mu_0 - \cos\mu) + A(p_0^2 + q_0^2).$$

Enfin, exprimons que la somme des moments des forces extérieures par rapport à ON, qui est une direction invariable dans l'espace, étant constamment nulle, la projection de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement *absolues* sur ON est invariable.

Les projections de cet axe sur Oξ, Oη, Oζ étant respectivement

$$A(p + p_1), \quad A(q + q_1), \quad C(r + r_1),$$

on a

$$A(p + p_1)\cos(N, \xi) + A(q + q_1)\cos(N, \eta) + C(r + r_1)\cos(N, \zeta) = \text{const.}$$

Comme nous pouvons choisir à volonté les axes Oξ, Oη dans le plan normal à Oζ, il est permis de considérer, à un instant donné, Oξ comme coïncidant avec la projection de ON sur ce plan de l'équateur du tore. On aura ainsi

$$\cos(N, \xi) = \sin\mu, \quad \cos(N, \eta) = 0, \quad \cos(N, \zeta) = \cos\mu,$$

et en substituant ces valeurs, observant que l'on a aussi

$$p_1 = -\omega \cos(N, \xi) = -\omega \sin\mu, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = -\omega\cos\mu,$$

l'équation des moments relatifs à ON deviendra

$$A(p - \omega\sin\mu)\sin\mu + C(r - \omega\cos\mu)\cos\mu = \text{const.},$$

ou, à cause de l'équation (4),

$$A(p - \omega\sin\mu)\sin\mu + C(n - \omega\cos\mu_0)\cos\mu = \text{const.}$$

Déterminons la constante en faisant $t = 0$. Il vient

$$A(p\sin\mu - p_0\sin\mu_0) + A\omega(\sin^2\mu_0 - \sin^2\mu) + C(n - \omega\cos\mu_0)(\cos\mu - \cos\mu_0) = 0$$

d'où enfin

$$(6)\quad A(p\sin\mu - p_0\sin\mu_0) = (\cos\mu_0 - \cos\mu)[A\omega(\cos\mu_0 + \cos\mu) + C(n - \omega\cos\mu_0)].$$

Les équations (4), (5), (6) renferment la solution du problème.

244. Le *gyroscope* de Foucault consiste en un tore en bronze dont l'axe est monté sur une double suspension qui assure la liberté de tous les mouvements autour du centre de gravité, et auquel un mécanisme de roues dentées permet d'imprimer une rotation excessivement rapide autour de son axe de figure. La première expérience de Foucault consiste à donner à l'axe une direction fixe, à imprimer la rotation, puis à laisser l'axe entièrement libre. On a, dans ce cas, $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, et n a une valeur très-grande. On peut donc, dans l'équation (6), négliger les termes renfermant le facteur ω, qui est très-petit, vis-à-vis des termes en n. Les équations (5) et (6) se réduisent, dans ces conditions, à

$$(7)\quad \begin{cases} A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) = 2Cn\omega(\cos\mu_0 - \cos\mu), \\ Ap\sin\mu = Cn(\cos\mu_0 - \cos\mu). \end{cases}$$

Ensuite, pouvant placer comme nous voulons le système de comparaison OXYZ, nous prendrons l'axe OZ dirigé vers le pôle boréal, suivant ON; nous aurons donc $\mu = \theta$. De plus, nous savons (**209**) que la composante p de la rotation instantanée du solide suivant OX_1 est égale à $\psi'\sin\theta$. Les équations (7) se réduisent donc à celles-ci, où $\alpha = \theta_0$,

$$(8)\quad \begin{cases} A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) = 2Cn\omega(\cos\alpha - \cos\theta), \\ A\sin^2\theta\cdot\psi' = Cn(\cos\alpha - \cos\theta), \end{cases}$$

qui déterminent les angles θ et ψ en fonction du temps.

Elles suffisent pour représenter le mouvement de l'axe du tore, car on reconnaît immédiatement leur identité avec les équations (5) du N° **210**,

qui se rapportent au mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe, pourvu que l'on pose la condition

$$Mgl = Cn\omega$$

pour déterminer la masse de ce solide et la distance de son centre de gravité au point fixe. Il en résulte que nous pouvons appliquer au mouvement de l'axe du gyroscope autour de l'axe boréal ON, les lois que nous avons trouvées pour le mouvement de l'axe du corps pesant autour de la verticale, savoir 1° L'axe $O\zeta$ du gyroscope oscille dans le plan mobile $NO\zeta$, l'angle $\theta = NO\zeta$ variant entre les limites très-rapprochées

$$\alpha, \qquad \alpha + \frac{2A\omega \sin \alpha}{Cn},$$

en sorte que l'oscillation est invisible et que l'axe $O\zeta$ paraît décrire un cône de révolution autour de l'axe du monde.

La durée de cette oscillation est

$$\frac{2\pi A}{Cn};$$

elle est extrêmement petite et indépendante de ω. 2° Le plan $NO\zeta$ tourne autour de ON, d'un mouvement de *précession*, avec une vitesse angulaire ψ' qui est (**212**)

$$\psi' = \frac{Mgl}{Cn}(1 - \cos kt),$$

ou, remplaçant k par sa valeur et Mgl par $Cn\omega$,

$$\psi' = \omega\left(1 - \cos \frac{Cn}{A} t\right).$$

Si l'on néglige le terme périodique, ou, ce qui revient au même, si l'on considère l'axe moyen du tore au lieu de l'axe vrai, on a

$$\psi' = \omega;$$

la vitesse de précession de l'axe est donc égale à la vitesse de rotation de la terre, et comme ψ' est ici *positif* par rapport à ON, le mouvement de précession se produit de gauche à droite, *ou en sens contraire du mouvement de la terre*. Si donc on suppose que l'axe du tore ait été fixé d'abord dans la direction d'une étoile, il continuera à suivre cette étoile dans son mouvement apparent.

245. Le gyroscope de Foucault se prête à une autre expérience

remarquable : en fixant l'un des anneaux de suspension, on peut *obliger l'axe du tore à se mouvoir dans un plan déterminé*, orienté de façon quelconque par rapport à l'axe ON. Les équations du n° **243** permettent d'étudier le mouvement de l'axe Oζ dans ces conditions.



Prenons le plan dont il s'agit, qui est fixe par rapport à la terre, pour plan des XY. L'axe OZ lui étant normal, et l'axe Oζ du tore étant mobile dans le plan XY, on a $\theta = 90°$. Nous prenons OX suivant la projection de ON sur le plan fixe XY; β étant l'angle NOX compris entre l'axe terrestre et le plan fixe, ν l'angle XOζ de l'axe du tore avec OX, nous avons évidemment

$$\cos\mu = \cos\beta \cos\nu.$$

On doit joindre ici aux forces extérieures qui agissent sur le tore la réaction normale du plan XY, qu'on supposera appliquée en un point quelconque de l'axe Oζ. Le moment de cette réaction par rapport à Oζ est nul à chaque instant; le travail de cette force dans le mouvement relatif de l'axe est nul également, puisqu'elle est normale au plan décrit par Oζ; les équations (4) et (5) subsistent sans changement, et l'on a, p_0 et q_0 étant toujours supposés nuls,

$$r = n + \omega(\cos\mu - \cos\mu_0), \qquad A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) = 2Cn\omega(\cos\mu_0 - \cos\mu).$$

Mais, à cause de $\theta = 90°$, $\theta' = 0$, de la valeur de $\cos\mu$ et de la relation évidente $\psi = 90° + \nu$, la seconde de ces équations se réduit à

$$A\nu'^2 = 2Cn\omega \cos\beta(\cos\nu_0 - \cos\nu),$$

ou

$$\frac{d\nu^2}{dt^2} = \frac{2Cn\omega\cos\beta}{A}(\cos\nu_0 - \cos\nu).$$

Supposons, pour plus de clarté, $n > 0$, la rotation initiale ayant lieu de gauche à droite autour de Oζ. Si l'on remplace ν par $\pi - \nu$, et si l'on pose

$$\frac{g}{l} = \frac{Cn\omega\cos\beta}{A}, \text{ ou } l = \frac{Ag}{Cn\omega\cos\beta},$$

l'équation précédente devient identique avec celle du mouvement d'un pendule simple de longueur l (**156**), la pesanteur étant dirigée suivant

le prolongement OX′ de OX, ou suivant la projection sur XY de la partie australe de l'axe terrestre. On conclut de là que

L'axe Oζ du tore exécutera des oscillations dans le plan fixe XY de part et d'autre de la projection sur XY de la partie australe de l'axe du monde, qui est sa position d'équilibre. La durée d'une oscillation complète de l'axe Oζ sera

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{Cn\omega\cos\beta}}.$$

Si le sens de la rotation initiale était changé, n serait négatif, OX serait la position d'équilibre et l'axe Oζ oscillerait de part et d'autre de OX.

Quand le plan XY est horizontal, on a $\beta = \lambda$, λ étant la latitude du lieu O; le mouvement de l'axe du tore est celui d'une aiguille magnétique de déclinaison écartée de sa position d'équilibre. — Quand le plan XY est celui du méridien, on a $\beta = 0$, la position d'équilibre de Oζ coïncide avec l'axe du monde. On voit comment, en l'absence de tout instrument astronomique, le gyroscope suffit pour déterminer la direction de la méridienne et la latitude pour un lieu donné.

Toutes ces conséquences du calcul ont été vérifiées parfaitement dans les expériences de L. Foucault.

Exercice.

Un anneau circulaire infiniment mince et homogène, de masse m, peut tourner librement autour d'un diamètre horizontal AA′, qui est fixé en son milieu à un axe vertical BB′ autour duquel le système tourne avec une vitesse angulaire constante ω. Par suite de ce mouvement, l'anneau tend à se placer dans le plan horizontal, mais une masse M, fixée à l'extrémité C d'un diamètre perpendiculaire à AA′, s'y oppose. Déterminer 1° la vitesse angulaire de l'anneau autour de l'horizontale AA′; 2° l'inclinaison pour laquelle l'équilibre relatif aurait lieu; 3° discuter le mouvement de l'anneau, soit quand la masse M est nulle, soit lorsqu'elle a une valeur donnée.



R. Appelons a le rayon de l'anneau, θ l'angle que fait avec la verticale OB le prolongement du rayon OC; rapportons le mouvement de l'anneau à un système de comparaison OXYZ, OZ coïncidant avec OB, OX avec la charnière OA, OY perpendiculaire aux deux autres. Appliquant le théorème

des forces vives au mouvement relatif du solide composé de l'anneau et de la masse M on trouve d'abord pour la force vive relative

$$\left(M + \frac{m}{2}\right) a^2 \frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Les forces extérieures se reduisent au poids Mg, dont le travail élémentaire relatif est $Mga\, d\cos\theta$. Le travail des forces centrifuges de tous les points dues à la rotation du système autour de BB' s'obtient en observant que, pour un point μ de l'anneau, à la distance r de l'axe, la force centrifuge est $\mu\omega^2 r$; l'arc élémentaire qu'il décrit dans le mouvement relatif est $a \sin\zeta\, d\theta$ (ζ étant l'angle que fait le rayon $O\mu$ avec OX); le cosinus de l'angle compris est

$$\frac{a \sin\zeta \sin\theta \cos\theta}{r}.$$

On obtient ainsi, pour la somme des travaux élémentaires des forces centrifuges

$$\left(M + \frac{m}{2}\right) a^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta d\theta.$$

L'équation des forces vives relatives donne

$$\left(M + \frac{m}{2}\right) a^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = 2Mga\cos\theta + \left(M + \frac{m}{2}\right) a^2\omega^2 \sin^2\theta + \text{const.},$$

ou, en divisant par $\left(M + \frac{m}{2}\right) a^2$ et posant $l = \frac{(2M+m)a}{2M}$,

$$(1) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}\cos\theta + \omega^2 \sin^2\theta + C.$$

Pour l'équilibre relatif, il faut que $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ soit nul; on trouve 1° $\theta = 0$, OC est vertical; 2° $\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$. Si cette quantité est < 1, l'angle θ_1, déterminé par cette équation correspondra à une position d'équilibre relatif.

La masse M étant enlevée, $l = \infty$, et l'équation (1) devient, θ_0 désignant la valeur de θ pour laquelle $\frac{d\theta}{dt}$ est nul,

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^2(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0),$$

d'où

$$t = \frac{1}{\omega}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_0}}.$$

Mouvement pendulaire à discuter.

Dans le cas général de M quelconque, l'équation (1) est la même que celle de l'exercice (4) du Ch. précédent; nous y renvoyons pour la discussion.

LIVRE QUATRIÈME.

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE.

CHAPITRE XXXV.

ÉQUATION GÉNÉRALE DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

246. On appelle *fluides*, en général, des systèmes de molécules formant en apparence une masse continue, mais pouvant rouler les unes sur les autres et se détacher du système sans résistance sensible, en sorte que la forme de la masse fluide varie avec la plus grande facilité.

On distingue généralement ces corps en *liquides* ou fluides *incompressibles*, et en *gaz* ou *fluides élastiques*. Les premiers, tels que l'eau, le mercure, soumis à des pressions très-considérables dans des enveloppes résistantes, n'éprouvent que des variations de volume et de densité inappréciables, et nous les regarderons en théorie comme absolument incompressibles. Les gaz, au contraire, par exemple l'hydrogène, l'azote, varient de volume sous les plus faibles variations de pression, et tendent toujours d'eux-mêmes à occuper le plus grand volume possible, en sorte qu'on est obligé de les maintenir dans des récipients fermés pour qu'ils ne s'échappent pas au dehors.

Les corps *visqueux*, *semi-fluides*, tiennent le milieu entre les solides et les liquides, participant des propriétés des uns et des autres; les

vapeurs se comportent comme les gaz lorsqu'elles sont éloignées de leur point de condensation, mais ces propriétés s'altèrent lorsqu'elles se rapprochent de cet état. La théorie mécanique des fluides proprement dits n'est donc applicable que dans une mesure très-limitée à ces divers corps; aussi ne nous en occuperons-nous pas ici, réservant pour la seconde partie du Cours diverses questions, auxquelles les travaux récents de quelques géomètres et les belles recherches de M. Tresca semblent promettre un grand avenir.

247. Les fluides étant des systèmes de points matériels, les lois, les formules, les propriétés générales de l'équilibre et du mouvement des systèmes, le théorème des forces vives par exemple, leur sont toujours applicables. Mais, à cause de l'ignorance où nous sommes de la nature des liaisons et des réactions intérieures dans ces systèmes, on a dû jusqu'ici fonder en partie la théorie des fluides sur certains principes spéciaux tirés directement de l'expérience.

Considérons un fluide quelconque, sollicité par des forces quelconques qui agissent généralement sur tous ses points, et renfermé dans une enveloppe solide. Sur la paroi interne de celle-ci, prenons un élément $\Delta\omega$ très-petit, que nous regarderons comme plan. Cet élément éprouve de la part du fluide renfermé dans l'enveloppe une certaine *pression* P, résultante des pressions sensiblement parallèles exercées sur tous ses points par le fluide. L'expérience montre, en premier lieu, que *cette pression* P *sur l'élément* $\Delta\omega$ *est normale à la surface de cet élément.* Cette propriété est d'ailleurs une conséquence de l'absence complète de frottements, que nous admettons entre les molécules fluides.

En divisant P par la surface $\Delta\omega$ de l'élément pressé, nous aurons ce qu'on nomme la *pression moyenne* sur cet élément; enfin, nous appellerons *pression en un point donné* M de la paroi, la pression moyenne $P : \Delta\omega$ qui a lieu normalement sur la surface d'un élément extrêmement petit entourant le point M. Nous la désignerons généralement par p.

Soit maintenant un point quelconque M pris dans l'intérieur de la masse fluide, et concevons par ce point un élément plan $\Delta\omega$, orienté d'une manière quelconque. Le fluide situé d'un côté de l'élément exerce, sur la portion de fluide de l'autre côté, une pression P normale à l'élément $\Delta\omega$, et nous pouvons chercher comme précédemment le rapport de cette pression P à la surface de l'élément, ainsi que la valeur p de ce rapport lorsqu'on suppose $\Delta\omega$ inférieur à toute dimen-

sion sensible; p est alors *la pression au point* M de la masse fluide, et le principe fondamental de la théorie mécanique des fluides consiste en ce que *l'intensité de la pression en un point* M *de la masse fluide est indépendante de l'orientation, autour du point* M, *de l'élément plan auquel elle est normale.* C'est en cela que consiste le principe de *l'égalité de pression dans tous les sens*, et l'expérience montre qu'il est vrai, non seulement dans un fluide en équilibre, mais, jusqu'à un certain point, dans les fluides en mouvement. Au moyen de ce principe, nous allons établir l'équation qui renferme les lois de l'équilibre des fluides ou de *l'hydrostatique.*

248. *Equation de l'équilibre.* — Considérons un fluide en équilibre. Soient x, y, z les coordonnées rectangles d'un point M, pris dans la masse; p la pression, ρ la densité du fluide en M; X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la force, résultante de toutes les actions extérieures, rapportée à l'unité de masse et telle qu'elle agit au point M [1]. Les quantités p, ρ, X, Y, Z sont regardées ici comme des fonctions continues des trois variables indépendantes x; y, z.

Imaginons un cylindre droit M_0M à génératrice parallèle à l'axe des x, ayant pour base un élément $\Delta\omega$ qui comprend le point M. Ce cylindre est en équilibre entre les pressions que le fluide exerce sur sa surface totale et les forces extérieures qui sollicitent tous les points de sa masse. Nous pouvons le considérer comme libre, et les conditions d'équilibre d'un *solide* libre devront être vérifiées, comme nous l'avons plusieurs fois observé (**96**). La somme des projections sur OX de toutes les forces qui agissent sur lui doit donc être nulle. Or, les pressions du fluide sur sa surface *latérale*, étant normales aux génératrices et par conséquent à OX, ne donnent aucune composante suivant OX; si x_0, p_0 désignent les valeurs de x, p à l'extrémité M_0 du cylindre, les pressions sur les deux bases seront parallèles à OX et auront respectivement pour valeurs $p_0\Delta\omega$, $-p\Delta\omega$, celle-ci étant dirigée dans le sens des x négatifs. Enfin, si l'on décompose le cylindre en éléments infiniment minces par des plans perpendiculaires à OX, $\Delta\omega\cdot dx$ représentera le volume, $\rho\Delta\omega\cdot dx$ la masse d'un de ces éléments, $X\rho\Delta\omega\cdot dx$ la projection sur OX de la somme



[1] Voir, au sujet des forces X, Y, Z, ce que nous avons défini au N° **115**.

des forces extérieures qui sollicitent tous les points du fluide compris dans cet élément. Le principe rappelé plus haut donnera donc l'équation

$$p_0 - p + \int_{x_0}^{x} \rho X\, dx = 0,$$

$\Delta\omega$ disparaissant comme facteur à tous les termes. Si l'on différentie partiellement cette équation par rapport à x, x_0 ne variant pas, on en déduit

$$\frac{dp}{dx} = \rho X.$$

Un raisonnement analogue conduit aux égalités

$$\frac{dp}{dy} = \rho Y, \qquad \frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

et ces trois équations peuvent être comprises dans une seule : en les multipliant respectivement par dx, dy, dz et les ajoutant, on a

$$(1) \qquad dp = \rho\,(X dx + Y dy + Z dz)$$

pour l'équation générale qui renferme les conditions d'équilibre d'une masse fluide, dont la densité varie d'un point à l'autre d'une manière quelconque.

249. Le premier membre de l'équation (1) est une différentielle totale exacte par rapport aux variables x, y, z; il faut donc qu'il en soit de même du second. Les conditions pour que

$$\rho\,(X dx + Y dy + Z dz)$$

soit une différentielle exacte en x, y, z devront donc être vérifiées, sinon l'équilibre sera impossible.

S'il s'agit d'un liquide homogène, ρ sera une constante donnée (puisque les variations de pression ne modifient pas la densité d'un tel fluide); c'est alors l'expression

$$X dx + Y dy + Z dz$$

qui devra être différentielle exacte; en d'autres termes, *il devra exister, pour les forces extérieures qui agissent sur le fluide, une fonction des forces*.

S'il s'agit d'un gaz dont la température est la même en tous ses points, il suit de la loi de Mariotte que la densité en chaque point sera proportionnelle à la pression, et l'on aura

$$\rho = Qp,$$

Q étant un coefficient qui dépend de la température du gaz. L'équation d'équilibre peut être mise sous la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{Q}\frac{dp}{p} = Xdx + Ydy + Zdz,$$

et puisque le premier membre est évidemment une différentielle exacte en x, y, z, il faudra encore que le second membre, ou $Xdx + Ydy + Zdz$ soit une différentielle exacte.

250. *Surfaces de niveau.* — On nomme *surface de niveau*, dans un fluide en équilibre, toute surface telle que la pression p est constante en tous ses points. Une telle surface est caractérisée par l'équation $p = \text{const.}$, ou $dp = 0$, ou, d'après l'équation (1),

$$(3) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Il résulte de cette équation, d'après une remarque déjà faite, que la résultante des actions extérieures, en un point du fluide en équilibre, est normale à la surface de niveau qui passe par ce point. On sait aussi que, en général, deux surfaces de niveau ne peuvent avoir aucun point commun.

Lorsque le fluide n'est pas enfermé de toutes parts par une enveloppe, comme c'est le cas pour un liquide qui présente une *surface libre*, si la pression extérieure, celle de l'air, par exemple, est constante aux différents points de la surface libre, celle-ci devra être une surface de niveau et vérifier l'équation (3).

Si $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte, que φ soit la fonction des forces, on a

$$d\varphi = Xdx + Ydy + Zdz,$$

en sorte que l'équation des surfaces de niveau devient

$$d\varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(x, y, z) = \alpha,$$

α variant d'une surface à l'autre. La pression est alors une fonction du paramètre α seulement; d'après les équations (1) et (2), on a, dans le cas d'un liquide homogène

$$p = \rho\varphi(x, y, z) = \rho\alpha,$$

et dans le cas d'un gaz,

$$\frac{1}{Q} l.p = \varphi(x, y, z) = \alpha, \quad p = e^{Q\alpha}.$$

251. *Equilibre d'un fluide pesant.* — Le plan XY étant horizontal et l'axe de z positifs vertical dans le sens de la pesanteur, on a, pour un fluide soumis à la pesanteur seule,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g,$$

et l'équation (1) devient

$$(4) \qquad dp = \rho g dz.$$

L'équation des surfaces de niveau se réduit à $dz = 0$, ou, si l'on intègre, à

$$z = \text{const}.$$

Ainsi, *dans un fluide pesant en équilibre, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux*. Cela suppose évidemment une masse fluide assez limitée pour que l'on puisse regarder la pesanteur comme constante en grandeur et en direction dans toute son étendue.

L'expression ρdz ne peut être une différentielle exacte en x, y, z que si ρ ne renferme ni x, ni y; ρ étant fonction de z seul, *la densité sera constante, dans un fluide pesant en équilibre, en tous les points d'un même plan horizontal*. Elle peut d'ailleurs varier avec z, et même d'une manière brusque, comme cela a lieu dans l'équilibre de plusieurs liquides de densités différentes superposés.

Intégrons l'équation (4), et désignons par p_0 la pression qui répond au plan $z = z_0$. Nous aurons

$$(5) \qquad p = p_0 + g\int_{z_0}^{z} \rho dz.$$

Or, dz est le volume d'un élément ayant l'unité de surface pour base et dz pour hauteur; ρdz est la masse, $g\rho dz$ le poids de cet élément; donc

La différence des pressions qui correspondent à deux plans horizontaux donnés, dans le fluide, est égale au poids de la colonne fluide ayant pour base l'unité de surface, comprise entre ces deux plans.

Ce théorème s'applique aussi bien aux fluides élastiques qu'aux liquides. Lorsqu'il s'agit d'un liquide homogène, si l'on prend pour plan $z_0 = 0$ celui du niveau supérieur ou de la surface libre, on a

$$p = p_0 + g\rho z.$$

La pression en un point croît donc proportionnellement à la distance verticale du point considéré au plan du niveau supérieur.

252. *Pression sur une paroi plane.* — Supposons une paroi solide, plane, terminée par un contour quelconque, et recouverte par un liquide pesant et homogène dont la surface horizontale est soumise à une pression uniforme p_0. Les pressions que le liquide exerce sur tous les éléments de la paroi étant parallèles, donnent une résultante P normale au plan de la paroi; le point C où elle perce le plan s'appelle le *centre de pression.* Pour déterminer la pression P et le point C, prenons pour plan XY le plan du niveau supérieur, l'axe des z étant vertical dans le sens de la pesanteur; pour axe des y l'intersection du plan XY par le plan de la paroi prolongé. Soient A l'aire de la surface pressée; α l'angle que fait son plan avec le plan horizontal XY; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité G de l'aire A; x', y', z' celles du centre de pression. Décomposons l'aire A en éléments infiniment petits $d\omega$; la pression sur un de ces éléments sera $pd\omega = (p_0 + g\rho z)d\omega$. Nous aurons donc, l'intégrale s'étendant à tous les éléments de l'aire A,



$$P = \int (p_0 + g\rho z)\, d\omega = A p_0 + g\rho \int z\, d\omega = A(p_0 + g\rho z_1),$$

et comme $p_0 + g\rho z_1$ mesure la pression dans le fluide au point G, *la pression totale sur l'aire A est égale au produit de cette aire par la pression que le fluide exerce sur le centre de gravité* G; *elle est donc la même, quelle que soit la position que l'on donne à la surface pressée autour de son centre de gravité.*

La théorie des forces parallèles nous donne ensuite, pour déterminer x', y', z', les équations

$$Px' = \int (p_0 + g\rho z)\, x\, d\omega = p_0 A x_1 + g\rho \int xz\, d\omega,$$
$$Py' = \int (p_0 + g\rho z)\, y\, d\omega = p_0 A y_1 + g\rho \int yz\, d\omega,$$
$$Pz' = \int (p_0 + g\rho z)\, z\, d\omega = p_0 A z_1 + g\rho \int z^2 d\omega.$$

Soient u, v les distances d'un point quelconque (x, y, z) de l'aire A à l'axe OY et à la perpendiculaire OU à cet axe dans le plan de l'aire; Ak^2 le moment d'inertie de l'aire A par rapport à OY. Nous aurons

$$x = u \cos \alpha, \quad y = v, \quad z = u \sin \alpha,$$

d'où, substituant dans les formules ci-dessus et réduisant,

$$\left\{ \begin{aligned} Pu' &= A(p_0 u_1 + g\rho k^2 \sin \alpha), \\ Pv' &= A p_0 v_1 + g\rho \sin \alpha \int uv\, d\omega, \end{aligned} \right.$$

u_1, v_1 se rapportant au centre de gravité.

Ces formules déterminent, dans le plan de l'aire, les coordonnées u', v' du centre de pression, ce qui suffit, la coordonnée verticale z' étant égale à $u' \sin \alpha$.

253. Lorsque la surface pressée par le liquide est une surface courbe, il n'est plus démontré qu'il existe une résultante des pressions élémentaires, les directions de celles-ci n'étant plus parallèles. On devra décomposer la pression normale élémentaire $(p_0 + g\rho z)\, d\omega$ parallèlement à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ ; calculer la somme des composantes parallèles à chaque axe, et la somme des moments de ces pressions élémentaires par rapport à chaque axe. Ces sommes s'exprimeront par des intégrales s'étendant à toute la surface pressée. On en déduira, d'après les règles de la Statique, la force résultante des pressions et l'axe du couple résultant de ces mêmes pressions, en grandeur et en direction. C'est là le cas général.

Il existe cependant un cas remarquable dans lequel les pressions superficielles donnent une résultante unique, même lorsqu'il s'agit d'un fluide pesant, de densité variable, et en équilibre. Nous savons d'ailleurs que la densité et la pression sont alors constantes dans un même plan horizontal.

Concevons qu'un solide, limité par une surface fermée, soit plongé dans ce fluide. Soit $d\omega$ un élément de sa surface ; un cylindre parallèle à OX et s'appuyant sur le contour de cet élément découpera nécessairement sur la surface un deuxième élément $d\omega'$, et si nous appelons (N, x), (N', x), les angles que font avec OX les normales à ces éléments, menées vers l'intérieur du corps, il est clair que si (N, x) est aigu, (N', x) sera obtus. La valeur de p ne dépendant que de z, les composantes suivant OX des pressions sur $d\omega$, $d\omega'$ seront



$$p\, d\omega \cos (N, x), \quad p\, d\omega' \cos (N', x),$$

et comme $d\omega \cos (N, x)$, $d\omega' \cos (N', x)$ représentent, au signe près, les projections des éléments $d\omega$, $d\omega'$ sur le plan YZ, lesquelles sont égales, ces composantes aussi sont égales, mais de signes contraires ; elles se font donc équilibre.

Toute la surface pouvant se décomposer en éléments qui ont ainsi deux-à-deux même projection sur le plan YZ, il est clair que les compo-

santes parallèles à OX des pressions élémentaires que le fluide exerce sur la surface se font équilibre. Un raisonnement identique s'appliquant aux composantes parallèles à OY, il ne reste à considérer que les composantes verticales des pressions, qui, étant parallèles, se réduisent nécessairement à une force unique.

Considérons le cylindre infiniment mince parallèle à l'axe des z, passant par le contour de l'élément $d\omega$; soient $d\omega_1$ l'élément qu'il découpe sur la surface du corps, p_1, z_1 les valeurs de p et de z correspondantes à l'élément $d\omega_1$, ε la section droite du cylindre. D'après la remarque faite plus haut, la somme algébrique des composantes verticales des pressions sur $d\omega$ et $d\omega_1$ est égale à

$$p d\omega \cos(N, z) + p_1 d\omega_1 \cos(N_1, z) = p\varepsilon - p_1\varepsilon.$$

Or, d'après le théorème du N° **251**, on a

$$p_1 - p = g\int_z^{z_1} \rho dz,$$

ρ étant la fonction de z qui représente la densité du fluide. Donc

$$p\varepsilon - p_1\varepsilon = -g\varepsilon\int_z^{z_1} \rho dz,$$

et comme le second membre, abstraction faite du signe, est égal au poids de la colonne fluide qui occuperait la place du cylindre élémentaire si le corps n'existait pas, on voit que ce cylindre est poussé verticalement vers le haut par une force égale au poids de la colonne fluide dont il s'agit. Ce même raisonnement s'applique à chacun des filets verticaux dans lesquels on peut décomposer le solide; l'effet produit sur le solide par les pressions à sa surface est donc le même que si chaque élément du corps était soumis à une force verticale, vers le haut, égale au poids du fluide dont cet élément occupe la place; donc, évidemment,

Les pressions élémentaires qu'un fluide pesant en équilibre exerce sur la surface d'un solide qui y est plongé sont réductibles à une force unique, verticale et dirigée en sens contraire de la pesanteur, égale au poids total du fluide donc le solide occupe la place, et appliquée au centre de gravité de ce fluide.

C'est là le théorème connu sous le nom de *principe d'Archimède;* on l'énonce souvent en disant qu'*un corps plongé dans un fluide perd de son poids le poids du fluide déplacé.*

Il importe de remarquer que la démonstration subsiste quelle que soit la forme du corps, même si une droite pouvait couper sa surface en plus de deux points, car ce nombre de points sera toujours *pair* et les éléments $d\omega$ se grouperont toujours par couples auxquels le raisonnement ci-dessus s'appliquera.

254. Le principe d'Archimède s'applique aussi à un solide qui n'est plongé qu'en partie dans un liquide; qui flotte, par exemple, à sa surface. Il suffit, pour le démontrer, de remarquer que la loi suivant laquelle ρ varie avec z n'est pas déterminée dans la démonstration ci-dessus, et si l'on suppose que ρ soit nul pour les valeurs de z qui répondent à des points au-dessus de la surface libre, on tombera précisément sur la conséquence que nous voulions établir.

De là on déduit les conditions d'équilibre d'un corps *flottant*, ou plongé en partie seulement dans un liquide en équilibre. Il faut et il suffit 1° que le poids du solide soit égal au poids du fluide dont il occupe la place; 2° que le centre de gravité G du solide, et le centre de gravité G′ de la masse fluide déplacée, soient sur une même verticale. Il est clair, en effet, que si ces deux conditions sont remplies, les deux forces qui sollicitent le corps seront égales et directement opposées. Lorsque le solide est homogène ainsi que le fluide, le centre de gravité G′ du fluide déplacé coïncide avec celui du volume du corps compris sous le plan du niveau du liquide. De plus, V′ désignant ce volume et V le volume total du corps, ρ et ρ' les densités respectives du solide et du liquide, la première condition donne

$$V\rho = V'\rho', \text{ ou } \frac{V'}{V} = \frac{\rho}{\rho'} = \mu,$$

μ étant le rapport donné des densités du solide et du fluide. Le problème de déterminer les positions d'équilibre du solide se réduit donc à ce problème géométrique : *Couper le solide par un plan tel que le volume* V′ *d'une partie soit au volume total* V *dans un rapport donné, et que les centres de gravité des volumes* V *et* V′ *soient sur une même perpendiculaire au plan sécant*. La solution est impossible si $\rho > \rho'$.

Ce problème présente, en général, de grandes difficultés. Si l'on suppose que le corps ait une forme prismatique ou cylindrique, et que les arêtes soient horizontales dans la position de flottage, la question se simplifie. Les centres de gravité G et G′ des volumes V, V′ coïncident

avec les centres de gravité des sections droites de ces volumes par le milieu des arêtes, et les volumes eux-mêmes sont dans le même rapport que leurs sections droites. Il suffit donc de résoudre pour l'aire de la section droite du solide le problème posé ci-dessus.

255. Comme exemple, considérons un cylindre dont la section droite soit le segment de parabole BAC, AF étant l'axe, BC une corde perpendiculaire à l'axe. Soit DE la droite cherchée, telle que le rapport des aires DAE, BAC soit μ, et que les centres de gravité respectifs G' et G de ces aires soient sur une perpendiculaire à DE.



A' étant le point de la parabole où la tangente est parallèle à la ligne de flottaison DE, soient A'K parallèle à AF ; $2p$ le paramètre de la parabole, $AF = a$, $A'K = u$, α l'angle que fait A'K avec l'horizontale; on a

$$surf.\ BAC = \frac{4a}{3}\sqrt{2pa}, \qquad surf.\ DA'E = \frac{4}{3}u\sqrt{2pu},$$

et la première condition fournit l'équation

$$\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \mu, \qquad \text{ou} \qquad u = \mu^{\frac{2}{3}} a.$$

Les centres de gravité G, G' des aires BAC, DA'E se trouvent sur AF, A'K, à des distances

$$AG = \frac{3}{5}a, \qquad A'G' = \frac{3}{5}u.$$

Soit H le point où la normale en A' coupe l'axe. Pour que la deuxième condition soit remplie, il faut que GG' soit parallèle à A'H, ou A'G' égal à GH, d'où

$$A'G' = AG - AH, \qquad \text{ou} \qquad \frac{3}{5}u = \frac{3}{5}a - p\left(1 + \frac{1}{2}\cot^2\alpha\right),$$

d'où enfin

$$u = a - \frac{5}{3}p\left(1 + \frac{1}{2}\cot^2\alpha\right).$$

Éliminant u, on obtient pour déterminer l'inclinaison α l'équation

$$\sin^2\alpha = \frac{5p}{6a\left(1 - \mu^{\frac{2}{3}}\right) - 5p}.$$

Ces valeurs de u et de α déterminent les positions de la droite DE qui, prises pour lignes d'affleurement, correspondent à des positions d'équilibre du solide.

La recherche des conditions nécessaires pour que l'équilibre du corps flottant soit stable présente beaucoup plus de difficultés, et nous ne nous en occuperons pas ici(¹).

256. Comme application de l'équation générale de l'équilibre, proposons-nous encore de déterminer la forme de la surface libre d'un liquide pesant contenu dans un vase animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical, lorsque le liquide est à l'état d'équilibre *relatif*.

L'axe des z étant vertical, en sens contraire de la pesanteur, on a

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

D'après la théorie du mouvement relatif, il faut écrire que l'équation (1) est vérifiée si l'on ajoute à ces composantes celles de la force centrifuge, savoir

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y, \quad 0,$$

(ω étant la vitesse de rotation du vase), et les composantes de la force centrifuge composée. qui s'évanouissent ici puisque la vitesse relative est nulle. Nous aurons donc

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz).$$

L'équation des surfaces de niveau est donc

$$\omega^2(x dx + y dy) - g dz = 0, \quad \text{ou} \quad z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + C,$$

C étant la constante introduite par l'intégration. Ces surfaces sont des paraboloïdes de révolution autour de l'axe de rotation.

La surface libre du liquide étant une surface de niveau, son équation est comprise dans la précédente. Pour déterminer la valeur correspondante de la constante C, on exprimera que le volume total compris entre cette surface et celle du vase est égal au volume donné V du fluide. Par exemple, si le vase est cylindrique, de rayon a, et si h

(¹) Voir Clebsch, *Journal de Crelle*, T. 57, et la thèse de M. Turquan *sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*.

désigne la hauteur du liquide dans le vase supposé en repos, h' sa hauteur dans le vase en mouvement, on aura

$$V = \pi a^2 h, \quad C = h' - \frac{\omega^2 a^2}{2g},$$

$$\pi a^2 h' - \frac{1}{2}\pi a^2 \frac{\omega^2 a^2}{2g} = \pi a^2 h,$$

d'où

$$C = h - \frac{\omega^2 a^2}{4g},$$

d'où, pour l'équation de la surface libre,

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}\right).$$

Exercices.

1. Dans un fluide en équilibre, la densité en un point quelconque M est proportionnelle à la distance de ce point à un centre fixe O; la force P qui sollicite le fluide en M est dirigée vers le point O, et proportionnelle au carré de la pression en M. Trouver l'expression de la pression et l'équation des surfaces de niveau.

R. L'origine étant en O, p_0 désignant la pression en ce point, μ le rapport de la densité ρ à la distance OM, a le rapport de la force P au carré de la pression, on a

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} = \frac{a\mu}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Les surfaces de niveau sont des sphères dont le centre est O.

2. Un fluide, dans lequel l'accroissement de pression qui détermine un accroissement de densité est supposé proportionnel à cette dernière, est disposé en couches sphériques homogènes sur une surface sphérique de rayon a. Les éléments du fluide s'attirent en raison inverse du carré de la distance. L'équilibre étant supposé avoir lieu, quelle est la loi de la densité des couches?

R. D'après l'hypothèse et d'après la loi connue (ex. 5, chap. XIX), on aura, r désignant le rayon d'une couche fluide, k, λ des constantes données,

$$\frac{dp}{d\rho} = k\rho, \quad P = \frac{4\pi\lambda}{r^2}\int_a^r \rho r^2 dr,$$

et la force P est dirigée vers le centre de la couche. On trouve, pour déterminer ρ, l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\rho}{dr} + \frac{4\pi\lambda}{k}\rho = 0,$$

d'où

$$\rho = \frac{A}{r}\left(\cos r\sqrt{\frac{4\pi\lambda}{k}} + \alpha\right),$$

α, A étant des constantes.

3. Une surface plane étant plongée dans un liquide pesant et homogène en équilibre, par le c. de g. G et par le centre de pression C de cette surface on mène des horizontales dans le plan de la figure. Démontrer que, de quelque manière que la figure se déplace parallèlement à elle-même dans son plan, le produit de la pression totale P sur cette surface par la distance des deux droites ne varie pas.

R. Les formules du N° 252 donnent la relation

$$P(u' - u_1) = Ag\rho\lambda^2 \sin\alpha,$$

λ étant le rayon de gyration de la figure par rapport à l'horizontale menée par son centre de gravité; cette équation démontre la proposition. Lorsque p_0 est nul, elle devient

$$u_1(u' - u_1) = \lambda^2.$$

4. Un vase hémisphérique fermé par un plan est entièrement rempli d'un liquide pesant et homogène. Quelle doit être l'inclinaison θ de l'axe du plan sur la verticale pour que la somme des pressions élémentaires sur la surface totale du vase soit un maximum.

R. On trouve, pour la somme des pressions élémentaires sur le plan, $\pi g\rho a^3 \sin\theta$ (a, rayon de la sphère), et sur la demi-surface sphérique, $\pi g\rho a^3 (\cos\theta + 2\sin\theta)$. La condition de maximum fournit la relation

$$\operatorname{tg}\theta = 3.$$

5. Déterminer la pression totale et le centre de pression C pour une paroi rectangulaire, placée verticalement dans un liquide pesant et homogène, de manière que deux côtés opposés soient horizontaux.

R. Soient a le côté vertical, b le côté horizontal du rectangle, p_0 la pression au niveau du côté supérieur b; z' la distance du centre de pression à ce côté. Le point C étant d'ailleurs sur la droite qui joint les milieux des côtés b, on a

$$P = ab\left(p_0 + \frac{g\rho a}{2}\right), \qquad Pz' = a^2 b\left(\frac{p_0}{2} + \frac{g\rho a}{3}\right).$$

Si le rectangle affleure et qu'il n'y ait pas de pression extérieure, p_0 est nul et l'on a

$$z' = \frac{2a}{3}.$$

6. Même problème pour un quart de cercle, compris entre deux rayons dont l'un est vertical, l'autre horizontal.

R. Soient a le rayon du cercle, x' et z' les distances du centre de pression au côté vertical et au côté horizontal, p_0 la pression au niveau de ce dernier; on trouve

$$P = \frac{\pi a^2}{4} p_0 + \frac{g\rho a^3}{3}, \quad Px' = \frac{p_0 a^3}{3} + \frac{g\rho a^4}{8}, \quad Pz' = \frac{p_0 a^3}{3} + \frac{\pi g\rho a^4}{16}.$$

Lorsque le côté horizontal affleure et qu'il n'y a pas de pression extérieure, on a $p_0 = 0$,

$$P = \frac{g\rho a^3}{3}, \quad x' = \frac{3a}{8}, \quad z' = \frac{3\pi a}{16}.$$

7. Une porte d'écluse est formée d'un rectangle ABCD et d'un quart de cercle ABE; ce système tourne autour d'un axe vertical AB. Calculer la largeur $u = AD$ de la portion rectangulaire, pour laquelle la porte sera en équilibre indifférent autour de AB lorsque le niveau du liquide sera en EAD. On néglige la pression extérieure p_0.



R. Les moments des pressions sur ABCD, ADE, par rapport à AB, doivent être égaux. Cette condition, combinée avec les résultats des ex. **5** et **6**, conduit à

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

8. Centre de pression d'un trapèze dont le plan fait un angle α avec le plan horizontal, les bases étant horizontales, la pression sur la surface libre du liquide nulle.

R. Soient a la base supérieure, b la base inférieure, h la hauteur du trapèze; c la distance de la base supérieure à l'intersection du plan du trapèze et de la surface libre; δ la distance du centre de pression à la base a. Le centre de pression est sur la droite qui joint les milieux des bases, et l'on a

$$\delta = \frac{(a+3b)\,h^2 + 2\,(a+2b)\,hc}{2\,(a+2b)\,h + 6\,(a+b)\,c}.$$

Si la base a affleure, $c = 0$, on a

$$\delta = \frac{(a+3b)\,h}{2\,(a+2)}.$$

9. Centre de pression d'un parallélogramme, d'un triangle, la pression sur la surface libre étant nulle.

R. Cas particuliers de l'exemple précédent ($a = b$, $a = 0$).

10. Établir les formules générales de la réduction des pressions sur une surface courbe, à une force R et à un couple G.

R. Soient toujours p_0 la pression superficielle, ρ la densité du fluide homogène; dA, dB, dC les projections sur les plans YZ, XZ, XY d'un élément $d\omega$ de la surface, *considérées comme positives ou négatives, suivant que la normale à $d\omega$ dans le sens de la pression fait un angle aigu ou obtus avec l'axe normal au plan de projection;* X, Y, Z les composantes de R; G_x, G_y, G_z les composantes de l'axe du couple G. On trouve, les intégrales s'étendant à tous les éléments de la surface donnée,

$$X = p_0 A + g\rho \int z\,dA, \quad Y = p_0 B + g\rho \int z\,dB, \quad Z = p_0 C + g\rho \int z\,dC,$$

$$G_x = p_0 \int (y\,dC - z\,dB) + g\rho \int (yz\,dC - z^2 dB), \quad G_y = p_0 \int (z\,dA - x\,dC) + g\rho \int (z^2 dA - xz\,dC),$$

$$G_z = p_0 \int (x\,dB - y\,dA) + g\rho \int (xz\,dB - yz\,dA).$$

11. Une sphère creuse est remplie hermétiquement d'un liquide pesant et homogène. 1° Démontrer que les pressions élémentaires sur sa surface, correspondantes à la portion du liquide située au-dessus d'un plan horizontal quelconque, se réduisent à une force unique, et évaluer cette résultante; 2° déterminer la position du plan horizontal pour laquelle cette résultante est nulle; 3° calculer la pression totale de la

masse liquide et prouver qu'elle est égale à son poids; 4° mener un plan horizontal tel que les pressions résultantes des portions de liquide séparées par ce plan soient égales.

R. Soient a le rayon de la sphère, z la distance du plan horizontal à l'extrémité supérieure du diamètre vertical de la sphère, Z la résultante des pressions du liquide situé au-dessus de ce plan, comptée positivement vers le haut.

On trouve, en décomposant la surface pressée en bandes horizontales,

$$Z = \pi g \rho \left(a - \frac{2}{3} z \right) z^2.$$

Si le plan passe par le centre, on a $Z = \frac{\pi g \rho a^3}{3} = \frac{P}{4}$, P étant le poids total du liquide.

Pour que Z soit nul, il faut que le plan soit à une distance du centre, au-dessous de ce point, égale à la moitié du rayon. — Lorsque $z = 2a$, on a la pression totale; elle est égale à

$$-\frac{4}{3} \pi g \rho a^3.$$

Enfin, pour que les portions au-dessus et au-dessous du plan donnent des pressions égales, il faut que l'on ait

$$2z^3 - 3az^2 - 2a^3 = 0.$$

Il y a une racine réelle comprise entre $\frac{7}{4} a$ et $2a$.

12. Un cadre rectangulaire horizontal a deux côtés opposés réunis par une membrane flexible; les deux autres portent deux parois verticales et fixes; l'espace intermédiaire est rempli d'un liquide homogène et pesant, jusqu'au niveau du cadre. Déterminer la forme d'équilibre de la membrane.

R. Il suffit de considérer une section parallèle aux parois fixes. Les équations du N° **117** montrent que la tension est constante, égale au produit du rayon de courbure par la pression du fluide. Appelant φ l'inclinaison de la tangente à la section sur l'horizontale; x, z les coordonnées horizontale et verticale de la courbe; T_0 la tension constante, φ_0 la valeur de φ pour $z = 0$, on a, en se servant d'une expression connue du rayon de courbure (Cours d'An., ch. XVII, ex. **1**),

$$2T_0 (\cos \varphi - \cos \varphi_0) = - g \rho z^2,$$

d'où l'équation différentielle de la courbe,

$$dx = \frac{(\cos \varphi_0 - az^2)\, dz}{\sqrt{1 - (\cos \varphi_0 - az^2)^2}}.$$

13. Démontrer que, dans le cas d'équilibre relatif traité au N° **156**, quelle que soit la vitesse angulaire ω du vase, la surface libre du liquide coupe le plan du niveau primitif suivant un cercle fixe, de rayon $a : \sqrt{2}$.

14. Un vase rectangulaire est animé d'un mouvement uniformément accéléré de translation horizontal et parallèle à ses faces latérales. Quelle est la forme d'équilibre relatif d'un liquide homogène et pesant renfermé dans ce vase.

R. On trouve une surface plane.

CHAPITRE XXXVI.

DE L'ÉQUILIBRE DE L'ATMOSPHÈRE.

257. L'air atmosphérique qui entoure le globe terrestre étant supposé en équilibre, il existe entre la hauteur d'un point M au-dessus du niveau des mers, et la pression de l'air en ce point, une relation que nous voulons déterminer. Soient z l'ordonnée verticale du point M, comptée à partir de la surface de la mer; R le rayon terrestre, g la pesanteur à la surface de la mer; p la pression, ρ la densité, θ la température de l'air en M.

L'intensité de la pesanteur variant en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre, sa valeur en M sera

$$\frac{gR^2}{(R+z)^2} = g\left(1+\frac{z}{R}\right)^{-2} = g\left(1-\frac{2z}{R}\right),$$

en négligeant le carré du rapport $z : R$ qui est toujours très-petit pour les hauteurs que l'on peut avoir à considérer. Le plan XY étant horizontal, on a d'ailleurs $X = 0$, $Y = 0$; l'équation d'équilibre des fluides devient donc

$$dp = -g\rho\left(1-\frac{2z}{R}\right)dz\,.$$

D'après les propriétés des gaz, il existe entre p, ρ et θ la relation

$$p = k\rho\,(1+\alpha\theta),$$

k et α étant des coefficients numériques connus. L'équation ci-dessus peut donc s'écrire

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{k(1+\alpha\theta)}\left(1-\frac{2z}{R}\right)dz.$$

θ est une fonction inconnue de z, mais le coefficient α ayant une valeur numérique très-petite,

$$\alpha = 0{,}00367,$$

un changement sensible dans la valeur de θ n'altère que très-peu l'équation précédente, et l'on admet qu'entre deux stations S_1 et S_2 situées à

peu près sur une même verticale, on peut regarder θ comme une constante égale à la moyenne des température θ_1 et θ_2 en ces deux points. L'équation s'intègre alors et donne

$$\mathrm{l}.\, p = -\frac{g}{k(1+\alpha\theta)}\left(z - \frac{z^2}{R}\right) + \text{const.}$$

Telle est la loi de la pression dans l'atmosphère en équilibre.

Soient z_1, p_1, z_2, p_2 les valeurs de z et de p en S_1 et S_2, ζ la distance verticale de S_2 au dessus de S_1, en sorte que

$$z_2 - z_1 = \zeta, \quad z_2 + z_1 = 2z_1 + \zeta.$$

En éliminant la constante arbitraire de l'équation ci-dessus, on a

$$\mathrm{l}.\frac{p_1}{p_2} = \frac{g}{k(1+\alpha\theta)}\left(1 - \frac{2z_1+\zeta}{R}\right)\zeta,$$

d'où, enfin,

$$(1) \qquad \zeta\left(1 - \frac{2z_1+\zeta}{R}\right) = \frac{k(1+\alpha\theta)}{g}\,\mathrm{l}.\frac{p_1}{p_2}.$$

Cette formule est employée pour déterminer la différence d'altitude de deux stations S_1 et S_2 au moyen d'observations barométriques faites en ces deux points. Ces observations font connaître, en effet, p_1 et p_2. Le thermomètre donne θ_1 et θ_2, et par suite

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

Le coefficient k est égal au quotient de la pression moyenne, 10333^{kg}, par la densité de l'air à $0°$ et sous cette pression moyenne. On a, à peu près,

$$k = 78375.$$

Dans l'expression de g, on tiendra compte de la variation de la pesanteur avec la latitude, ce qui introduit un terme assez petit proportionnel au carré du cosinus de la latitude. On suppose z_1 connu. Enfin, pour tenir compte de la vapeur d'eau toujours mélangée à l'air, on force un peu le coefficient de dilatation α et l'on prend

$$\alpha = 0{,}004.$$

Pour se servir commodément de la formule (1), on observe que le

terme $(2z_1 + \zeta)$: R étant très-petit vis-à-vis de l'unité, peut être négligé dans une première approximation, et l'on a ainsi la valeur

$$\zeta = \frac{k(1 + \alpha\theta)}{g} \mathrm{l.} \frac{p_1}{p_2}.$$

Mettant pour ζ cette valeur approchée dans le facteur

$$1 - \frac{2z_1 + \zeta}{R},$$

l'équation (1) fournira une deuxième valeur plus exacte de ζ, et ainsi de suite.

CHAPITRE XXXVII.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

258. Le problème général de *l'hydrodynamique*, ou science du mouvement des fluides, est celui-ci : on connaît les positions et les vitesses initiales de tous les points matériels qui composent une masse fluide, les forces extérieures qui agissent sur ces points à un instant quelconque du mouvement. Il s'agit de déterminer, dans toute la suite du temps, les positions et les vitesses des points, les trajectoires qu'ils décrivent, la pression et la densité en un point quelconque de la masse.

Ce problème très-compliqué peut être abordé comme il suit. Au lieu de suivre pendant leur mouvement les molécules du fluide, on étudie l'état du fluide en un point quelconque de l'espace qu'il occupe et à un instant quelconque. Soient (x, y, z) les coordonnées rectangles d'un point M de l'espace rempli par le fluide; v_x, v_y, v_z les composantes de la vitesse qui anime le fluide en ce point à l'époque t; p la pression, ρ la densité du fluide, X, Y, Z les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de masse, au même point x, y, z et à la même époque t. On voit donc que v_x, v_y, v_z, p, ρ, X, Y, Z sont des fonctions de quatre variables indépendantes x, y, z, t, fonctions entre lesquelles existent des relations que nous devons chercher.

Il est clair que si l'on parvient à résoudre le problème sous ce

dernier point de vue, la question primitive sera résolue aussi. Supposons, en effet, que nous ayons obtenu les valeurs de v_x, v_y, v_z en fonction de x, y, z, t, savoir

$$v_x = f(x, y, z, t), \quad v_y = f_1(x, y, z, t), \quad v_z = f_2(x, y, z, t).$$

Si nous considérons une particule déterminée du fluide, ses coordonnées ξ, η, ζ seront des fonctions du temps t, et les composantes de sa vitesse seront les dérivées de ces fonctions par rapport au temps. Mais les relations précédentes ayant lieu en un point et à un instant quelconque, il s'ensuit que

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\xi, \eta, \zeta, t), \quad \frac{d\eta}{dt} = f_1(\xi, \eta, \zeta, t), \quad \frac{d\zeta}{dt} = f_2(\xi, \eta, \zeta, t).$$

L'intégration de ce système d'équations du premier ordre, et la détermination des constantes par la position initiale de la particule considérée, feront connaître ξ, η, ζ en fonction de t et par suite le mouvement de cette particule.

259. Le principe de d'Alembert nous fournit trois équations du mouvement. D'après ce principe, les équations d'équilibre du fluide (**248**) doivent être vérifiées, si l'on joint aux forces qui sollicitent le fluide les forces conservées de tous ses points, prises en sens contraire ; c'est-à-dire, si l'on ajoute respectivement aux composantes X, Y, Z, les composantes j_x, j_y, j_z de l'accélération du fluide en M, changées de signe. On a donc, sous une première forme,

$$(1) \qquad \frac{dp}{dx} = \rho(X - j_x), \quad \frac{dp}{dy} = \rho(Y - j_y), \quad \frac{dp}{dz} = \rho(Z - j_z).$$

Il faut ensuite exprimer j_x, j_y, j_z au moyen de v_x, v_y, v_z. Or, si ξ, η, ζ désignent les coordonnées du point matériel qui est actuellement en (x, y, z), on a évidemment

$$j_x = \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{d\xi}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} + \frac{df}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt}$$

$$= \frac{df}{dt} + f\frac{df}{d\xi} + f_1\frac{df}{d\eta} + f_2\frac{df}{d\zeta},$$

ou enfin, en remplaçant ξ, η, ξ par leurs valeurs actuelles x, y, z,

$$j_x = \frac{dv_x}{dt} + v_x\frac{dv_x}{dx} + v_y\frac{dv_x}{dy} + v_z\frac{dv_x}{dz}.$$

On opérera de la même manière pour j_y, j_z, et l'on obtiendra les trois équations tirées du principe de d'Alembert sous la forme suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx} = X - \dfrac{dv_x}{dt} - v_x\dfrac{dv_x}{dx} - v_y\dfrac{dv_x}{dy} - v_z\dfrac{dv_x}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dy} = Y - \dfrac{dv_y}{dt} - v_x\dfrac{dv_y}{dx} - v_y\dfrac{dv_y}{dy} - v_z\dfrac{dv_y}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dz} = Z - \dfrac{dv_z}{dt} - v_x\dfrac{dv_z}{dx} - v_y\dfrac{dv_z}{dy} - v_z\dfrac{dv_z}{dz}. \end{cases}$$

260. On obtient une relation distincte des précédentes par la condition de ***continuité du fluide***, c'est-à-dire en exprimant que l'accroissement de la masse dans un espace limité V, pendant le temps infiniment petit Δt, est égale à la masse de fluide qui a pénétré dans cet espace à travers sa surface, pendant ce même temps.

Soient $d\omega$ un élément de la surface fermée qui limite le volume V; v_n la composante de la vitesse du fluide en ce point suivant la direction N de la normale à $d\omega$, prise vers l'intérieur de V. Le volume du fluide qui entre dans l'espace V par l'élément $d\omega$, dans le temps Δt, est évidemment égal à $v_n \Delta t \cdot d\omega$, et sa masse à $\rho v_n \Delta t \cdot d\omega$. La masse totale du fluide qui pénètre dans l'espace V pendant le temps Δt est donc



$$(3)\quad \Delta t \int \rho v_n d\omega = \Delta t \int \rho \left[v_x \cos(N, x) + v_y \cos(N, y) + v_z \cos(N, z)\right] d\omega,$$

l'intégrale s'étendant à toute la surface fermée. Soient $d\omega_x$, $d\omega_y$, $d\omega_z$ les projections de l'élément $d\omega$ sur les plans YZ, XZ, XY. D'après une remarque déjà faite au N° **253**, $\cos(N, x)\, d\omega = \pm\, d\omega_x$, suivant que l'angle (N, x) est aigu ou obtus, en sorte que si l'on associe deux-à-deux les éléments $d\omega$ qui ont même projection sur le plan YZ, et si l'on désigne par $\Delta_x(\rho v_x)$ l'accroissement que prend la fonction ρv_x quand on passe d'un côté à l'autre du volume V sur une parallèle à l'axe des x, on voit sans peine que l'on a

$$\int \rho v_x \cos(N, x)\, d\omega = -\int \Delta_x(\rho v_x)\, d\omega_x,$$

l'intégrale s'étendant maintenant à tous les éléments $d\omega_x$, ou à l'aire de la projection du volume V sur le plan XY. On aura, de même,

$$\int \rho v_y \cos(N, y)\, d\omega = -\int \Delta_y(\rho v_y)\, d\omega_y, \quad \int \rho v_z \cos(N, z)\, d\omega = -\int \Delta_z(\rho v_z)\, d\omega_z.$$

D'autre part, si l'on désigne par ρ' la densite *moyenne* du fluide dans l'intérieur du volume V, elle devient, à l'époque $t + \Delta t$, $\rho' + \Delta_t \rho'$, et l'accroissement de masse a pour expression $V \Delta_t \rho'$. Égalons cette expression à celle de la formule (3), substituons aux intégrales à la surface leurs valeurs, divisons par Δt et faisons tendre Δt vers zéro; nous aurons l'équation

$$\int \Delta_x (\rho v_x)\, d\omega_x + \int \Delta_y (\rho v_y)\, d\omega_y + \int \Delta_z (\rho v_z)\, d\omega_z + V \frac{d\rho'}{dt} = 0.$$

Mais la somme des éléments $d\omega_x$, multipliés respectivement par les portions correspondantes Δx des parallèles à l'axe OX comprises sous la surface donnée, est égale au volume V. On a donc

$$V = \int \Delta x\, d\omega_x,$$

et de même

$$V = \int \Delta y d\omega_y, \qquad V = \int \Delta z d\omega_z,$$

d'où l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$(4) \qquad \frac{\int \Delta_x (\rho v_x)\, d\omega_x}{\int \Delta x\, d\omega_x} + \frac{\int \Delta_y (\rho v_y)\, d\omega_y}{\int \Delta y\, d\omega_y} + \frac{\int \Delta_z (\rho v_z)\, d\omega_z}{\int \Delta z\, d\omega_z} + \frac{d\rho'}{dt} = 0.$$

Enfin, on sait que

$$\int \Delta_x (\rho v_x)\, d\omega_x = \int \frac{\Delta_x (\rho v_x)}{\Delta x} \cdot \Delta x d\omega_x = \left[\frac{\Delta_x (\rho v_x)}{\Delta x}\right] \int \Delta x d\omega_x,$$

les crochets désignant une moyenne entre les valeurs que la fonction affecte pour tous les éléments $d\omega_x$. Raisonnant de la même manière pour les autres intégrales, on met l'équation (4) sous la forme

$$\left[\frac{\Delta_x (\rho v_x)}{\Delta x}\right] + \left[\frac{\Delta_y (\rho v_y)}{\Delta y}\right] + \left[\frac{\Delta_z (\rho v_z)}{\Delta z}\right] + \frac{d\rho'}{dt} = 0.$$

Cette équation s'applique à un volume V de grandeur finie quelconque, pris dans la masse fluide. Mais si l'on suppose que ce volume soit très-petit dans tous les sens autour d'un point M, Δx, Δy, Δz sont insensibles; les différences peuvent être remplacées par les différentielles, les valeurs moyennes par leurs valeurs au point M, ρ' par la densité en M, et l'on a

$$(5) \qquad \frac{d (\rho v_x)}{dx} + \frac{d (\rho v_y)}{dy} + \frac{d (\rho v_z)}{dz} + \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Telle est l'*équation de continuité* du fluide, équation qui doit être vérifiée en chacun des points de la masse.

261. Les équations (2) et (5) sont aux dérivées partielles ; elles ne suffisent pas encore pour définir les fonctions inconnues v_x, v_y, v_z, p, ρ des quatre variables x, y, z, t. Mais lorsqu'il s'agit d'un liquide homogène, ρ est une constante connue, et il ne reste à déterminer que quatre fonctions par les quatre équations (2) et (5). De plus, l'équation (5) se simplifie alors, et devient

$$(6) \qquad \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

S'il s'agit d'un gaz, ρ est une fonction inconnue, mais on a la relation connue

$$p = k\rho(1 + \alpha\theta),$$

θ étant la température, k un coefficient numérique. Si donc la température est constante et donnée dans toute l'étendue du fluide, cette équation entre p et ρ complétera le nombre des équations nécessaires.

Dans le cas des liquides hétérogènes, la cinquième équation ne s'obtient que par des considérations qui ne nous semblent pas satisfaisantes.

262. Aux équations (2) et (5), qui ont lieu en un point quelconque du fluide, on doit joindre encore les équations dites *à la surface*, ou qui ont lieu seulement pour les points du fluide distribués, à l'instant que l'on considère, sur une surface déterminée. Nous n'indiquerons que deux cas :

1° Si le fluide en mouvement présente une surface libre sur laquelle un gaz exerce une pression P, connue et partout égale (pression atmosphérique), on aura, en tout point (x, y, z) de cette surface à un instant quelconque, la condition

$$p = \mathrm{P}.$$

2° Supposons que la masse fluide en mouvement soit constamment en contact avec une paroi solide, dont la surface est représentée par une équation

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0.$$

Les points matériels du fluide en contact avec la paroi ont nécessairement leurs vitesses dirigées tangentiellement à cette paroi ; donc, pour

tout point (x, y, z) qui vérifie l'équation de la surface, la direction de la vitesse du fluide est perpendiculaire à la normale en ce point, et v_x, v_y, v_z vérifient nécessairement l'égalité

$$v_x \frac{dF}{dx} + v_y \frac{dF}{dy} + v_z \frac{dF}{dz} = 0.$$

Ces équations à la surface servent à déterminer les fonctions arbitraires qui s'introduiraient par l'intégration des équations (2) et (5), intégration qui, d'ailleurs, est presque toujours au-dessus des forces de l'analyse.

Il faut ajouter que ces équations (2) elles-mêmes sont fondées sur le principe de l'égalité de pression dans tous les sens, et que ce principe, très-admissible dans l'hydrostatique, s'écarte probablement de la vérité dans les cas où le fluide est animé de mouvements rapides.

A raison de ces imperfections graves qui entachent les formules fondamentales de l'hydrodynamique, nous ne développerons pas les conséquences générales qu'on a essayé d'en tirer, et nous nous bornerons à traiter un problème simple qui conduit à des résultats utiles.

263. *Du mouvement permanent d'un fluide.* — Lorsque la masse fluide que l'on considère est soumise à des conditions parfaitement invariables; que les forces motrices, en chaque point de l'espace occupé par le fluide, ne dépendent plus du temps, on admet qu'au bout d'un certain temps il s'établit un état *permanent*, c'est-à-dire que l'état du fluide en un point donné (x, y, z) ne varie plus, et que les quantités v_x, v_y, v_z, p, ρ dépendent encore de x, y, z, mais sont indépendantes de t. Il suit delà que deux particules fluides qui, à des époques différentes, passent par un même même point, y passent avec des vitesses identiques et parcourent des trajectoires identiques. Si l'on se représente, à un instant donné, l'ensemble des molécules fluides qui, suivant ainsi le même chemin, ont passé ou passeront à travers un petit élément plan donné, on aura ce que nous appelons un *filet* du fluide.

Les cas où le mouvement est sensiblement permanent se présentent souvent. Ainsi, un récipient rempli d'un liquide homogène et pesant, maintenu à un niveau constant par un réservoir indéfini, et muni d'un orifice d'écoulement, offre un exemple très-simple du cas où les conditions du mouvement permanent sont remplies.

Admettons donc l'hypothèse ci-dessus; supposons en outre qu'il existe une fonction des forces, et que l'on ait

$$X dx + Y dy + Z dz = d.\varphi(x, y, z).$$

Les équations de l'hydrodynamique, sous la forme (1), étant multipliées respectivement par dx, dy, dz et ajoutées, donneront

$$dp = \rho d\varphi - \rho\,(j_x dx + j_y dy + j_z dz);$$

car, p étant devenu indépendant du temps, on a

$$\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz = dp.$$

Les différentielles dx, dy, dz sont arbitraires; si nous les prenons suivant le trajet de la molécule fluide, nous aurons

$$dx = v_x dt,\quad dy = v_y dt,\quad dz = v_z dt,$$

$$j_x = \frac{dv_x}{dt},\quad j_y = \frac{dv_y}{dt},\quad j_z = \frac{dv_z}{dt},$$

et, par suite,

$$j_x dx + j_y dy + j_z dz = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = \frac{1}{2}\,d.v^2,$$

v étant la vitesse du fluide en M. On aura donc pour la différentielle de la pression, prise le long d'un même filet du fluide,

$$dp = \rho d\varphi - \frac{\rho}{2} d.v^2.$$

Cette équation s'intègre dans le cas d'un fluide homogène; ρ étant alors constant, on a

$$(7)\qquad p = \rho\varphi\,(x, y, z) - \frac{\rho}{2} v^2 + C,$$

la constante C ayant des valeurs différentes pour les divers filets fluides. La relation (7) a donc lieu entre p, v, x, y, z sur toute l'étendue d'un même filet.

264. Appliquons ces formules à un liquide pesant, maintenu à niveau constant dans un vase par un réservoir d'alimentation, et s'écoulant par un orifice percé à la partie inférieure du vase. L'axe des z étant vertical dans le sens de la pesanteur, on a

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = g,\quad \varphi\,(x, y, z) = gz;$$

l'équation (7) prend la forme

$$p = \rho g z - \frac{\rho v^2}{2} + C.$$

Soient, pour un même filet fluide, p_0 la pression à la surface libre, z_0 la valeur de z qui se rapporte à cette surface, v_0 la vitesse du fluide en ce point; on a, en déterminant la constante C par ces données,

$$(8) \quad p - p_0 = g\rho(z - z_0) - \frac{\rho}{2}(v^2 - v_0^2).$$

Mais il existe entre v_0 et v une relation fournie par l'équation de continuité, laquelle est ici très-facile à former. Appelons σ_0, σ les sections transversales du filet considéré, correspondantes aux altitudes z_0 et z. Pour que le filet forme entre σ_0 et σ une masse homogène sans interruption, il faut que la quantité de liquide qui entre par la section σ_0 dans le temps dt soit égale à celle qui sort par σ dans le même temps; d'où l'égalité

$$\sigma_0 \cdot v_0 dt = \sigma \cdot v dt, \quad \text{ou} \quad v_0\sigma_0 = v\sigma.$$

L'équation (8) devient, par l'élimination de v_0,

$$p - p_0 = g\rho(z - z_0) - \frac{\rho v^2}{2}\left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right).$$

Cette équation peut servir à déterminer la vitesse v_1 avec laquelle le liquide s'échappe de l'orifice. Soit z_1 la valeur de z qui correspond, pour le filet liquide considéré, à la section faite à l'orifice. Admettons que la pression extérieure soit la même qu'à la surface; la pression p devant se mettre en équilibre à l'orifice avec la pression externe, nous avons $p = p_0$ pour $z = z_1$. L'équation devient ainsi

$$v_1^2\left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right) = 2g(z_1 - z_0),$$

et fait connaître la vitesse v_1. Le rapport $\sigma : \sigma_0$ est inconnu, à la vérité, mais lorsque la section de l'orifice est très-petite comparativement à l'aire de la surface libre du liquide, il est clair que ce rapport doit être très-petit, en sorte que son carré est négligeable. De plus, l'expérience montre qu'alors la surface libre reste sensiblement plane et horizontale malgré l'écoulement ; $z_1 - z_0$ se réduit donc, pour un filet quelconque, à la hauteur h du niveau du liquide au-dessus de l'orifice, et l'on a, après ces simplifications,

$$v_1^2 = 2gh, \qquad v_1 = \sqrt{2gh},$$

ce qui donne le théorème de Torricelli : *La vitesse avec laquelle un*

liquide pesant s'écoule par un orifice étroit, à la partie inférieure d'un vase où le liquide est maintenu à un niveau constant, est égale à celle qu'un corps acquerrait en chûte libre en tombant d'une hauteur égale à celle du niveau du liquide au-dessus de l'orifice.

Il faut remarquer toutefois que les formules ci-dessus ne sont vraiment applicables qu'aux filets liquides qui passent vers le centre de l'ouverture : les autres, plus rapprochés des parois du vase et de l'orifice, éprouvent pendant leur mouvement des frottements et des changements brusques de direction qui diminuent sensiblement leur vitesse. Aussi, lorsqu'on applique la valeur de v_1 à l'évaluation du *débit* de l'orifice, c'est-à-dire de la quantité de fluide qui s'en écoule pendant un temps donné, on trouve toujours une valeur supérieure à celle que l'expérience fournit.

265. La formule (8) donne la pression en un point de la masse fluide. Si le liquide était en repos, on aurait seulement (**251**)

$$p = p_0 + g\rho (z - z_0);$$

il suit de l'équation (8) que, à une même profondeur, la pression sera plus grande ou plus petite que dans l'état d'équilibre suivant que l'on aura

$$v^2 - v_0^2 < \text{ou} > 0.$$

Dans le voisinage de l'orifice, v croît très-rapidement et $v^2 - v_0^2$ acquiert une valeur considérable; aussi p diminue-t-il rapidement pour se mettre en équilibre avec la pression extérieure p_0.

On traitait autrefois par des considérations analogues la question de l'écoulement d'un gaz par un petit orifice, mais la solution qu'on en donnait était fausse en principe, parce que l'on ne tenait pas compte des variations de température qu'éprouve le gaz dans le voisinage de l'ouverture, variations qui ont une influence considérable dans le problème. C'est dans la théorie mécanique de la chaleur qu'il faut aujourd'hui étudier cette question de l'écoulement d'un gaz, parce qu'elle seule en donne une solution rationnelle.

266. Nous étudierons, comme dernière application des formules de l'hydrodynamique, un théorème relatif aux mouvements tourbillonnants.

Considérons un fluide animé d'un mouvement qui soit *symétrique* par rapport à un axe OZ (supposé vertical pour fixer les idées), c'est-à-dire que, en tous les points situés sur une même circonférence autour de l'axe OZ, la pression, la densité, la vitesse du fluide soient les mêmes.

Admettons aussi que les forces extérieures qui sollicitent le fluide passent par l'axe OZ.

Si nous appelons x, y les coordonnées rectangles; r et θ les coordonnées polaires d'un point M en projection sur un plan normal à OZ, nous aurons

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Les deux premières équations (1), savoir

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - j_x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - j_y,$$

multipliées respectivement par dx, dy et ajoutées, donnent

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy\right) = X\,dx + Y\,dy - (j_x\,dx + j_y\,dy).$$

Supposons que les différentielles dx, dy se rapportent à un déplacement sur la circonférence de rayon r autour de OZ. Il viendra

$$\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy = 0,$$

puisque p reste constant à un même instant sur cette circonférence. D'autre part, on a évidemment $X dx + Y dy = 0$, la direction de la force qui agit sur le fluide en M étant, d'après notre hypothèse, normale à la circonférence. Nous aurons donc, en attachant aux différentielles dx, dy le sens indiqué,

$$j_x\,dx + j_y\,dy = 0.$$

Or, nous avons, d'une part, r étant constant,

$$dx = -r\sin\theta\,d\theta, \qquad dy = r\cos\theta\,d\theta;$$

d'autre part, si nous considérons pour un instant r et θ comme les coordonnées, fonctions du temps, de la molécule qui occupe actuellement la position M, nous aurons

$$j_x = \frac{d^2 \cdot r\cos\theta}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$j_y = \frac{d^2 \cdot r\sin\theta}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Substituons dans la relation ci-dessus et posons

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

ω désignant ainsi la vitesse angulaire de la molécule située à la distance r de l'axe OZ. Il viendra, réductions faites,

$$2\omega\frac{dr}{dt}+r\frac{d\omega}{dt}=0,$$

d'où

$$2\omega r\frac{dr}{dt}+r^2\frac{d\omega}{dt}=0,\quad \text{ou}\quad \omega r^2=a,$$

en intégrant et désignant par a une quantité qui est constante pour une molécule fluide. Nous avons donc

$$\omega=\frac{a}{r^2},$$

c'est-à-dire que *dans le mouvement d'un fluide qui tourbillonne autour d'un axe de symétrie, la vitesse angulaire d'une même molécule varie, pendant son mouvement, en raison inverse du carré de sa distance à l'axe.*

Ce théorème, dû à M. Svanberg, est utilisé dans l'explication de certains phénomènes que présentent les tourbillons.



